

Rappel : Si X est une variable aléatoire discrète

Espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Variance :

$$\text{Var}X = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Ecart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}X}$$

EXERCICE 2D.1

Dans une usine qui fabrique des ampoules électriques, grâce à des tests, on parvient à définir la variable aléatoire X qui à une ampoule prise au hasard associe sa durée de vie (en jours).

Voici la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	123	124	125	126	127
$p(X = x_i)$	0,03	0,24	0,46	0,23	0,04

Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X .

EXERCICE 2D.2

1. On invente un jeu d'argent qui fonctionne de la façon suivante :

- Je lance un dé à 6 faces, non pipé.
- Si j'obtiens 2, 3, 4 ou 5, je ne gagne rien.
- Si j'obtiens 1, je gagne 1€.
- Si j'obtiens 6, je gagne 11€

On appelle X la loi de probabilité qui correspond au gain du joueur.

- a. Ecrire la loi de probabilité de X .
- b. Calculer l'espérance et l'écart-type de X .

2. Evidemment, ce jeu d'argent n'est pas gratuit : pour jouer, il faut d'abord miser 2€. On appelle Y la variable aléatoire qui représente le *gain net*, c'est-à-dire « gain – mise ».

- a. Ecrire la loi de probabilité de Y .
- b. Calculer l'espérance et l'écart-type de Y .

EXERCICE 2D.3

Le LOTO permet de gagner beaucoup d'argent en choisissant 5 numéros parmi 49 dans une grille et un numéro chance parmi 10.

Voici le tableau des gains :

Combinaison	1 chance sur...	Gain (brut)
5 n° + n° chance	19 068 840	3 000 000 €
5 n°	2 118 760	100 000 €
4 n°	211 876	750 €
3 n°	18 424	8 €
2 n°	1 176	4 €
n° chance	10	2 €

Sachant que la mise est de 2€ par grille, déterminer la loi de probabilité du gain net, son espérance mathématique, sa variance et son écart-type.



CORRIGE – Notre Dame de la Merci – Montpellier

EXERCICE 2D.1

Dans une usine qui fabrique des ampoules électriques, grâce à des tests, on parvient à définir la variable aléatoire X qui à une ampoule prise au hasard associe sa durée de vie (en jours).

Voici la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	123	124	125	126	127
$p(X = x_i)$	0,03	0,24	0,46	0,23	0,04

Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X .

ESPERANCE :

$$E(X) = 0,03 \times 123 + 0,24 \times 124 + 0,46 \times 125 + 0,23 \times 126 + 0,04 \times 127 = 125,01$$

VARIANCE :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= 0,03 \times 123^2 + 0,24 \times 124^2 + 0,46 \times 125^2 + 0,23 \times 126^2 + 0,04 \times 127^2 - 125,01^2 \\ &= 0,7499 \end{aligned}$$

ECART-TYPE :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,7499} \approx 0,866$$

EXERCICE 2D.2

1. On invente un jeu d'argent qui fonctionne de la façon suivante :

- Je lance un dé à 6 faces, non pipé.
- Si j'obtiens 2, 3, 4 ou 5, je ne gagne rien.
- Si j'obtiens 1, je gagne 1€.
- Si j'obtiens 6, je gagne 11€

On appelle X la loi de probabilité qui correspond au gain du joueur.

a. Ecrire la loi de probabilité de X .

X peut prendre les valeurs 0, 1 et 11.

$$p(X=0) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, p(X=1) = \frac{1}{6} \text{ et } p(X=11) = \frac{1}{6}$$

X	0	1	11	Total
$p(X)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}$

b. Calculer l'espérance et l'écart-type de X .

$$E(X) = \frac{4}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 11 = \frac{1}{6} + \frac{11}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \frac{4}{6} \times 0^2 + \frac{1}{6} \times 1^2 + \frac{1}{6} \times 11^2 - 2^2 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{121}{6} - 4 = \frac{122}{6} - \frac{24}{6} = \frac{98}{6} = \frac{49}{3} \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{49}{3}} \approx 4,041$$

2. Evidemment, ce jeu d'argent n'est pas gratuit : pour jouer, il faut d'abord miser 2€. On appelle Y la variable aléatoire qui représente le gain net, c'est-à-dire « gain – mise ».

a. Ecrire la loi de probabilité de Y .

Y peut prendre les valeurs -2 , -1 et 9 .



$$p(Y = -2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad p(Y = -1) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad p(Y = 9) = \frac{1}{6}$$

Y	-2	-1	9	Total
p(Y)	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}$

b. Calculer l'espérance et l'écart-type de Y.

Nous allons vérifier que l'espérance a baissé de 2€ et que la mesure de la dispersion des valeurs par la variance est restée identique :

$$E(Y) = \frac{4}{6} \times (-2) + \frac{1}{6} \times (-1) + \frac{1}{6} \times 9 = \frac{-8}{6} - \frac{1}{6} + \frac{9}{6} = 0 : \text{ ce jeu est équitable.}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 \\ &= \frac{4}{6} \times (-2)^2 + \frac{1}{6} \times (-1)^2 + \frac{1}{6} \times 9^2 - 0^2 \\ &= \frac{4}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 81 = \frac{16}{6} + \frac{1}{6} + \frac{81}{6} = \frac{98}{6} = \frac{49}{3} = V(X) \end{aligned}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{\frac{49}{3}} \approx 4,041 = \sigma(X)$$

Propriété : Propriétés de l'espérance et de la variance :

On considère deux variables aléatoires X et Y telles que $Y = aX + b$ (avec a et b réels). Alors :

$$1) \quad E(Y) = aE(X) + b \quad 2) \quad V(Y) = a^2 \times V(X) \quad 3) \quad \sigma(Y) = |a| \times \sigma(X)$$

→ ici : $Y = X - 2$ donc : $E(Y) = E(X) - 2$ et $V(Y) = 1^2 \times V(X) = V(X)$.

EXERCICE 2D.3

Le LOTO permet de gagner beaucoup d'argent en choisissant 5 numéros parmi 49 dans une grille et un numéro chance parmi 10. Voici le tableau des gains :

Combinaison	1 chance sur...	Gain (brut)
$5 n^\circ + n^\circ \text{ chance}$	19 068 840	3 000 000 €
$5 n^\circ$	2 118 760	100 000 €
$4 n^\circ$	211 876	750 €
$3 n^\circ$	18 424	8 €
$2 n^\circ$	1 176	4 €
$n^\circ \text{ chance}$	10	2 €

Sachant que la mise est de 2€ par grille, déterminer la loi de probabilité du gain net, son espérance mathématique, sa variance et son écart-type.

Le gain net correspond au gain brut auquel on soustrait la mise engagée.

Soit X la variable aléatoire qui correspond aux différents gains nets.

X peut prendre les valeurs :

$$-2, 0, 2, 6, 748, 99\,998, 2\,999\,998.$$

Certaines probabilités sont données dans l'énoncé, or la somme des probabilités de ces événements disjoints est égale à 1, donc :

$$p(X = -2) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{1176} - \frac{1}{18424} - \frac{1}{211876} - \frac{1}{2118760} - \frac{1}{19068840} \approx 0,8990901387$$

→ comme $\frac{1}{19068840} \approx 0,0000000524$, on va conserver une valeur très précise de $p(X = -2)$

On obtient la loi de probabilité de X :



X	-2	0	2	6	748	99 998	2 999 998	Total
$p(X)$	0,8990901387	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{1176}$	$\frac{1}{18424}$	$\frac{1}{211876}$	$\frac{1}{2118760}$	$\frac{1}{19068840}$	

Calcul de l'espérance :

$$E(X) = 0,8990901387 \times (-2) + \frac{1}{10} \times 0 + \frac{1}{1176} \times 2 + \frac{1}{18424} \times 6 + \frac{1}{211876} \times 748 + \frac{1}{2118760} \times 99998$$

$$+ \frac{1}{19068840} \times 2999998$$

$$E(X) \approx -1,5881.$$

Calcul de la variance :

$$V(X) = 0,8990901387 \times (-2)^2 + \frac{1}{10} \times 0^2 + \frac{1}{1176} \times 2^2 + \frac{1}{18424} \times 6^2 + \frac{1}{211876} \times 748^2 + \frac{1}{2118760} \times 99998^2$$

$$+ \frac{1}{19068840} \times 2999998^2 - (-1,5881)^2$$

$$V(X) \approx 476696,82.$$

Calcul de l'écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{476696,82} \approx 690,43$$