Exercices sur les fonctions quadratiques 1C

Exercice 1

Parmi ces fonctions, lesquelles sont quadratiques ?

a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$
b) $f(x) = \frac{1}{3x^2+5x-1}$
c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x - 1$
d) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5x - 1}$
e) $f(x) = \sqrt{3}x^2 + \sqrt{5}x - 1$
f) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 1$
g) $f(x) = 5x - 1$
h) $f(x) = 3x^2 - 1$
i) $f(x) = 3x^2 + 5x$
j) $f(x) = 3x^2$
k) $f(x) = 5x$
l) $f(x) = -1$

Exercice 2

a) Remplir le tableau des valeurs ci-dessous pour les six fonctions données.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_1(x) = x^2 - 2x - 3$							
$f_2(x) = x^2 - 4x + 4$							
$f_3(x) = x^2 + 2x + 2$							
$f_4(x) = -x^2 - x + 2$							
$f_5(x) = -x^2 + 2x - 1$							
$f_6(x) = -x^2 - x - 1$							

b) Tracer le graphe des six fonctions.

c) En vous basant sur le graphe, déterminer les zéros de la fonction.

Exercice 3

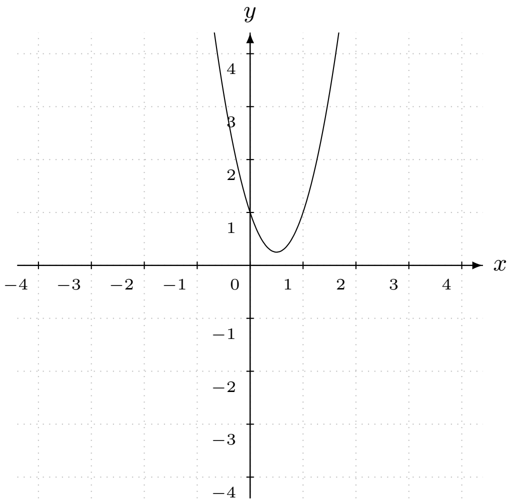
Pour les fonctions ci-dessous, calculer les coordonnées des points caractéristiques, puis esquisser le graphe.

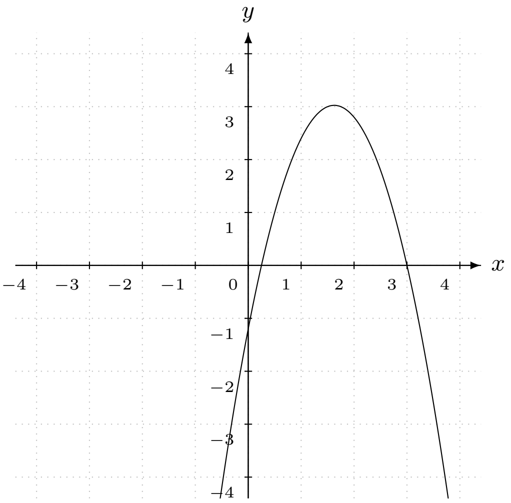
a) $f(x) = x^2 + 8x + 12$
b) $f(x) = x^2 - 4x$
c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 9$
d) $f(x) = -2x^2 + 8x - 13$
e) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$
f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$

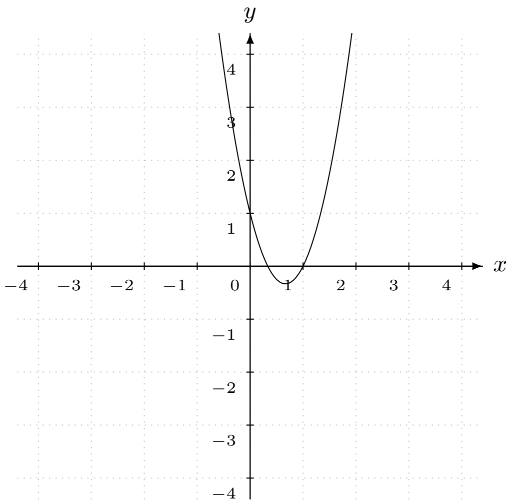
Exercice 4

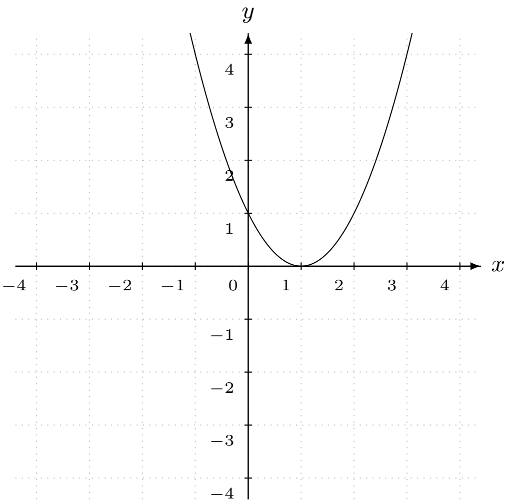
Sans faire de calcul, retrouver le graphe qui correspond à chacune des six fonctions.

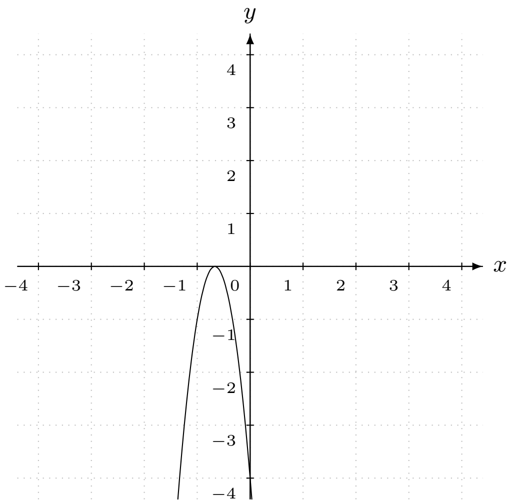
$f_1(x) = \frac{2}{5}(3-x)(4x-1)$	$f_3(x) = (x-1)^2$	$f_5(x) = -(3x+2)^2$
$f_2(x) = (3x-1)(x-1)$	$f_4(x) = -2x^2+5x-4$	$f_6(x) = 3x^2-3x+1$

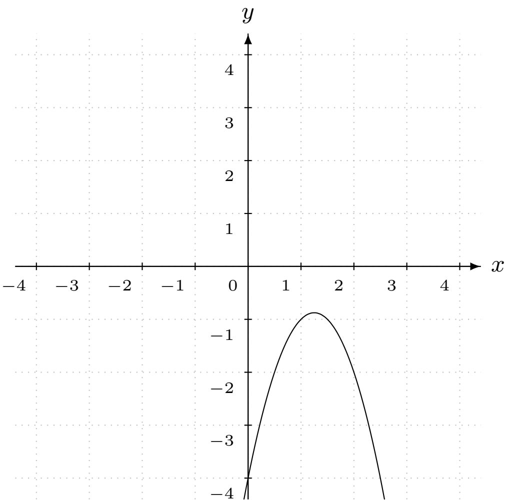






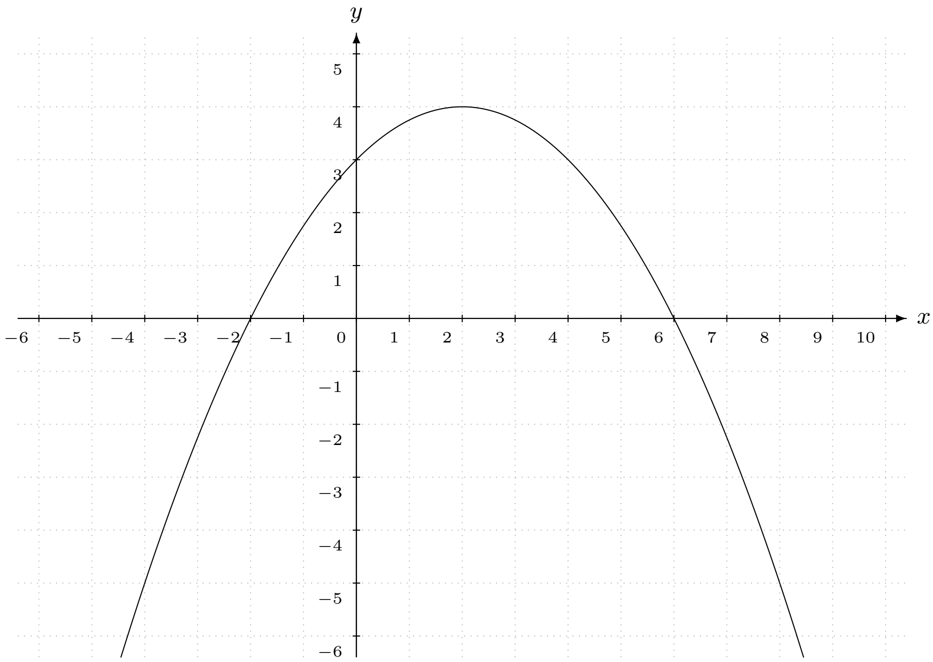






Exercice 5

Soit f la fonction dont le graphe est donné ci-dessous.



a) Les points suivants appartiennent-ils au graphe de f ?

$(4, 3)$	$(-4, 5)$	$(-2, 0)$
$(3, 4)$	$(-4, -5)$	$(0, -2)$

b) Trouver les coordonnées manquantes pour que les points appartiennent au graphe de f.

$(4, ...)$	$(0, ...)$	$(....., 4)$
$(-4, ...)$	$(....., 0)$	$(....., 5)$

c) Donner les images.

$f(4)$ $\quad f(-4)$ $\quad f(0)$ $\quad f(-2)$ $\quad f(8)$

d) Résoudre les équations.

$f(x) = -5$	$f(x) = 0$	$f(x) = 4$
$f(x) = 5$	$f(x) = 3$	$f(x) = 7$

Exercice 6

Soit f la fonction donnée par $f(x) = x^2 + 2x - 15$.

a) Calculer.

$f(1)$	$f(-3)$	$f(\frac{1}{2})$	$f(2k)$
$f(2)$	$f(0)$	$f(-\frac{7}{3})$	$f(-3k+5)$

b) Résoudre les équations.

$f(x) = 20$	$f(x) = 0$	$f(x) = -4$
$f(x) = -7$	$f(x) = 5$	$f(x) = \frac{3}{2}$
$f(x) = -16$	$f(x) = -20$	$f(x) = -\frac{10}{3}$

c) Les points suivants appartiennent-ils au graphe de f ?

$(-12, 1)$	$(-4, -39)$	$(-5, 0)$	$(\frac{1}{2}, \frac{18}{3})$
$(1, -12)$	$(-4, -7)$	$(0, 0)$	$(-\frac{4}{3}, -\frac{179}{9})$
$(12, -1)$	$(0, -5)$	$(\frac{1}{2}, -\frac{55}{4})$	$(-\frac{4}{3}, -\frac{143}{9})$

d) Trouver les coordonnées manquantes pour que les points appartiennent au graphe de f.

$(1, ...)$	$(-11, ...)$	$(....., -7)$	$(....., 7)$
$(2, ...)$	$(0, ...)$	$(....., \frac{3}{2})$	$(....., -21)$
$(\frac{1}{2}, ...)$	$(....., 0)$	$(....., 9)$	$(k, ...)$
$(5, ...)$	$(....., 20)$	$(....., -16)$	$(....., k)$

Exercice 7

a) Déterminer les points d'intersection des graphes de $f(x) = x^2 - 5x + 4$ et $g(x) = -4x + 10$.

b) Vérifier que la parabole d'équation $y = (x-3)^2$ est tangente à la droite $y = 2x - 7$ et déterminer les coordonnées du point de contact.

c) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + ax + 5$ est tangent à la droite d'équation $y = -4$. Donner les coordonnées du (des) point(s) de contact.

d) Déterminer les points d'intersection des graphes de $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = 3x^2 - 12x + 18$.

e) Déterminer les points d'intersection des graphes de $f(x) = -x^2 + 13x - 48$ et $g(x) = x^2 - 11x + 24$.

f) Déterminer les points d'intersection des graphes de $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = 2x^2 - 6$.

g) Pour quelle(s) valeur(s) de a le graphe de $f(x) = x^2 + a$ est-il tangent au graphe de $g(x) = 4x - x^2$.

Exercice 8

a) Déterminer les coordonnées des points caractéristiques de la fonction $f(x) = x^2 + 12x - 28$.

b) Déterminer les coordonnées des points caractéristiques de la fonction $f(x) = (x-4)(x-8)$.

c) Déterminer les coordonnées des points caractéristiques de la fonction $f(x) = x^2 - 24x$.

Exercice 9

Répondre aux questions sans utiliser de système d'équations.

a) Déterminer les abscisses à l'origine de la parabole de sommet $(-4, 12)$ et passant par $(6, 0)$.

b) Déterminer les abscisses à l'origine de la parabole de sommet $(-4, 12)$ et passant par $(6, 17)$.

c) Déterminer la fonction quadratique qui passe par le point $(4, 48)$ et dont tous les points caractéristiques sont confondus.

d) Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole passant par les points $(-6, 12)$, $(5, 7)$ et $(-17, 7)$.

e) Déterminer la fonction quadratique dont les zéros sont -5 et 3 et dont le graphe passe par le point $(2, -14)$.

f) Déterminer la fonction quadratique dont les zéros sont -5 et 3 et l'ordonnée à l'origine 5.

g) Déterminer la fonction quadratique dont le graphe est tangent à l'axe horizontal en $(-2, 0)$ et coupe l'axe vertical en $(0, -1)$.

h) Déterminer la fonction quadratique dont le graphe est de sommet $(-6, 0)$ et d'ordonnée à l'origine 18.

Exercice 10

Une balle de baseball est frappée verticalement avec une vitesse initiale de 40 m/s. Ainsi, le nombre de mètres au-dessus du sol qu'elle atteint après t secondes est donné par $f(t) = -5t^2 + 40t$.

a) A combien de mètres au-dessus du sol la balle est-elle après 1 seconde ? 2 secondes ?

b) Après combien de temps la balle atteindra-t-elle 75 mètres ? 50 mètres ?

c) Quelle sera la hauteur maximale atteinte par la balle ? Après combien de temps cela arrivera-t-il ?

d) Après combien de temps la balle retouchera-t-elle le sol ?

Exercice 11

A partir de la fenêtre de votre appartement, vous lancez en l'air une balle de telle sorte que sa hauteur (en mètres) au-dessus du sol en fonction du nombre de secondes écoulées depuis le lancement est donné par $f(t) = -5t^2 + 15t + 20$.

a) A quelle hauteur au-dessus du sol est votre fenêtre ?

b) A quelle hauteur sera la balle 1 seconde après son lancement ?

c) Quelle sera la hauteur maximale atteinte par la balle ?

d) Après combien de temps la balle repassera-t-elle à la même hauteur que votre fenêtre ?

e) Après combien de temps la balle touchera-t-elle le sol ?

Exercice 12

Quelle est la valeur maximale du produit de deux nombres si leur somme doit être égale à 26 ?

Exercice 13

Quelle est la valeur minimale du produit de deux nombres si leur différence doit être égale à 12 ?

Exercice 14

Sur un terrain qu'il possède, Louis souhaite construire un enclos rectangulaire pour ses vaches. Pour cela, il dispose de 80 mètres de clôture. Quelle est l'aire maximale qu'il peut donner à son enclos ?

Exercice 15

Sur un terrain qu'il possède, Louis souhaite construire un enclos rectangulaire pour ses vaches. Au nord, le terrain est délimité par une montagne et, pour les trois autres côtés, Louis dispose de 80 mètres de clôture. Quelle est l'aire maximale qu'il peut donner à son enclos ?

Exercice 16

Marcel dispose d'une longue pièce plate de fer blanc de 30 cm de large pour former une gouttière. Pour cela, il va relever le long de chacun des rebords deux bandes de largeurs égales. Quelle doit être la largeur de ces bandes pour que la capacité de la gouttière soit maximale ?

Références

Polycopié d'exercices sur les fonctions affines du Gymnase d'Yverdon

H. Bovet, "Algèbre", Polymaths, 2001

Comission Romande de Mathématiques (CRM), Notions élémentaires, Éditions du Tricorne, 2007

Solutions des exercices

Exercice 1

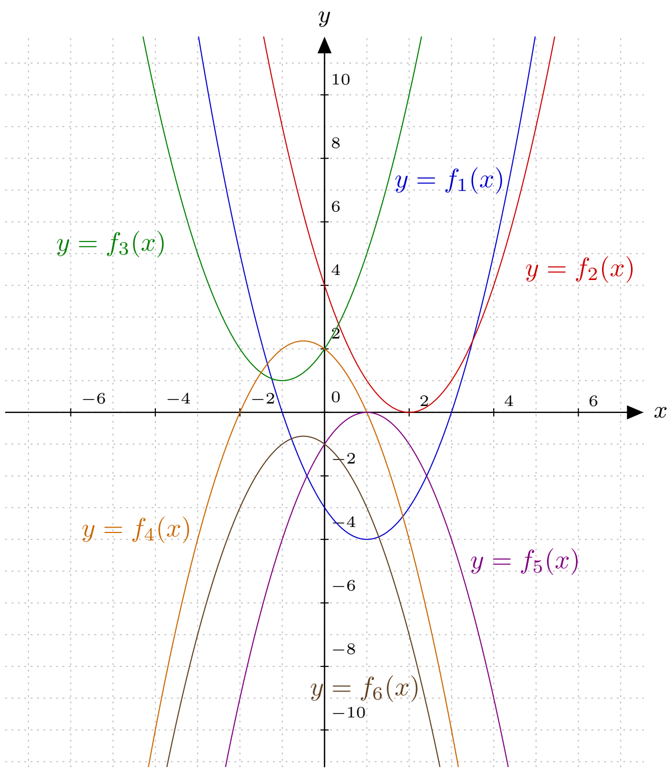
a) Oui.
b) Non.
c) Oui.
d) Non.
e) Oui.
f) Non.
g) Non.
h) Oui.
i) Oui.
j) Oui.
k) Non.
l) Non.

Exercice 2

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_1(x) = x^2 - 2x - 3$	12	5	0	-3	-4	-3	0
$f_2(x) = x^2 - 4x + 4$	25	16	9	4	1	0	1
$f_3(x) = x^2 + 2x + 2$	5	2	1	2	5	10	17
$f_4(x) = -x^2 - x + 2$	-4	0	2	2	0	-4	-10
$f_5(x) = -x^2 + 2x - 1$	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4
$f_6(x) = -x^2 - x - 1$	-7	-3	-1	-1	-3	-7	-13

b)

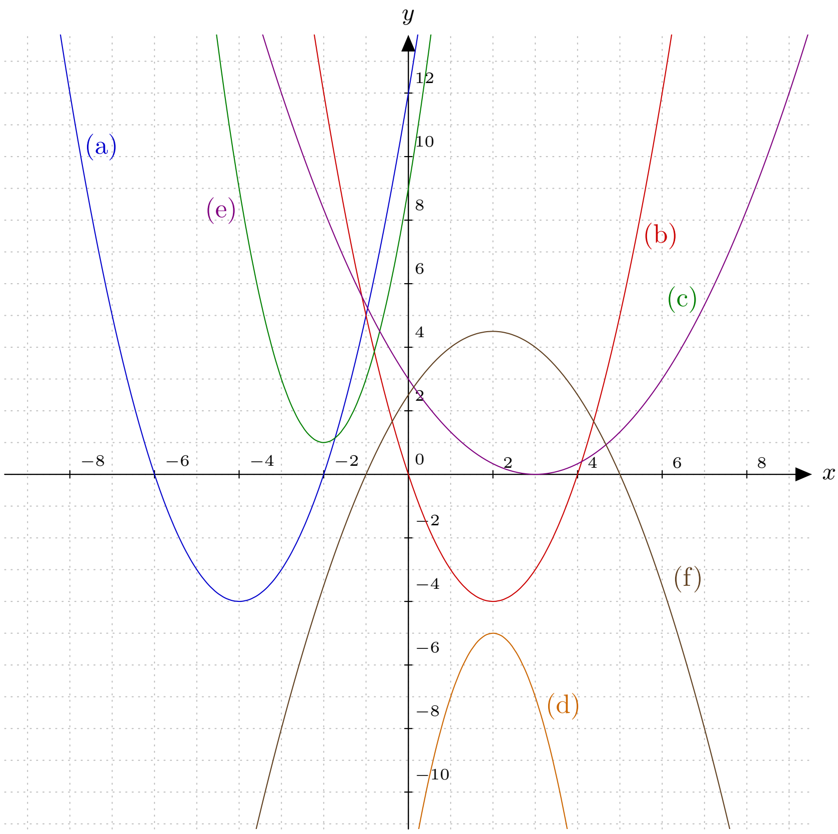


f_1 : -1 et 3 | f_3 : aucun zéro | f_5 : 1
f_2 : 2 | f_4 : -2 et 1 | f_6 : aucun zéro

f_1 : -1 et 3	f_3 : aucun zéro	f_5 : 1	

Exercice 3

a)	$H = (0, 12)$	$S = (-4, -4)$	$Z_1 = (-6, 0)$	$Z_2 = (-2, 0)$
b)	$H = (0, 0)$	$S = (2, -4)$	$Z_1 = H$	$Z_2 = (4, 0)$
c)	$H = (0, 9)$	$S = (-2, 1)$	aucun zéro	
d)	$H = (0, -13)$	$S = (2, -5)$	aucun zéro	
e)	$H = (0, 3)$	$S = (3, 0)$	$Z_1 = S$	
f)	$H = (0, \frac{5}{2})$	$S = (2, \frac{9}{2})$	$Z_1 = (-1, 0)$	$Z_2 = (5, 0)$



Exercice 4

De gauche à droite et de haut en bas, on a successivement f_6, f_1, f_2, f_3, f_5 et f_4.

Exercice 5

a) Oui. | Non. | Oui.
Non. | Oui. | Non.

b)

$(4,3)$ $(0,3)$ $(2,4)$
$(-4,-5)$ $(-2,0)$ ou $(6,0)$ Impossible.

c) $f(4)=3$ $f(-4)=-5$ $f(0)=3$ $f(-2)=0$ $f(8)=-5$

d) $S=\{-4,8\}$ $S=\{-2,6\}$ $S=\{2\}$
$S=\emptyset$ $S=\{0,4\}$ $S=\emptyset$

Exercice 6

a) $f(1)=-12$
$f(2)=-7$
$f(-3)=-12$
$f(0)=-15$
$f(\frac{1}{2})=-\frac{55}{4}$
$f(-\frac{7}{3})=-\frac{128}{9}$
$f(2k)=4k^2+4k-15$
$f(-3k+5)=9k^2-36k+20$

b) $S=\{-7,5\}$ $S=\{-5,3\}$ $S=\{-1-2\sqrt{3},-1+2\sqrt{3}\}$
$S=\{-4,2\}$ $S=\{-1-\sqrt{21},-1+\sqrt{21}\}$ $S=\{\frac{-2-\sqrt{70}}{2},\frac{-2+\sqrt{70}}{2}\}$
$S=\{-1\}$ $S=\emptyset$ $S=\{\frac{-3-\sqrt{114}}{3},\frac{-3+\sqrt{114}}{3}\}$

c) Non. Non. Oui. Non.
Oui. Oui. Non. Non.
Non. Non. Oui. Oui.

d) $(1,-12)$
$(2,-7)$
$(\frac{1}{2},-\frac{55}{4})$
$(5,20)$
$(-11,84)$
$(0,-15)$
$(-5,0)$ ou $(3,0)$
$(-7,20)$ ou $(5,20)$
$(-4,-7)$ ou $(2,-7)$
$(\frac{-2-\sqrt{70}}{2},\frac{3}{2})$ ou $(\frac{-2+\sqrt{70}}{2},\frac{3}{2})$
$(-6,9)$ ou $(4,9)$
$(-1,-16)$
$(-1-\sqrt{23},7)$ ou $(-1+\sqrt{23},7)$
Impossible.
$(a,a^2+2a-15)$
$(-1\pm\sqrt{16+a},a)$ si $a\geq-16$

Exercice 7

a) $I_1(-2;18)$ et $I_2(3;-2)$

b) $I_1(4;1)$

c) $a=6$, $I_1(-3;-4)$
$a=-6$, $I_1=(3;-4)$

d) $I_1(3;9)$ et $I_2(5;33)$

e) $I_1(6;-6)$

f) $I_1(-2;2)$ et $I_2(3;12)$

g) $a=2$

Exercice 8

a) $H=(0,-28)$, $S=(-6,-64)$, $Z_1=(-14,0)$, $Z_2=(2,0)$.

b) $H=(0,32)$, $S=(6,-4)$, $Z_1=(4,0)$, $Z_2=(8,0)$.

c) $H = (0, 0)$, $S = (12, -144)$, $Z_1 = (0, 0)$, $Z_2 = (24, 0)$.

Exercice 9

a) -14 et 6

b) Le graphe ne coupe pas l'axe horizontal.

c) $f(x) = 3x^2$

d) $S = (-6, 12)$

e) $f(x) = 2x^2 + 4x - 30$

Exercice 10

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 5$

b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x + 18$

Exercice 11

a) 35 mètres ; 60 mètres

b) 3 et 5 secondes ; $4 - \sqrt{6}$ et $4 + \sqrt{6}$ secondes

c) 80 mètres ; 4 secondes

d) 8 secondes

Exercice 12

a) 20 mètres

b) 30 mètres

c) $31,25$ mètres

d) 3 secondes

e) 4 secondes

Exercice 13

169

Exercice 14

-36

Exercice 15

400 m^2

Exercice 16

800 m^2

Exercice 17

$\frac{15}{2}$ cm