GYMNASE DE BURIER

Chapitre 6 - Equations et Inéquations

Sarah Dégallier Rochat

1. Equations

Exemple 1.1 Résoudre l'équation $15 + 3x = 1 - 4x$

$$
\begin{array}{rrcl|l}
 & 15 + 3x & = & 1 - 4x & +4x \\
\Leftrightarrow & 15 + 3x + 4x & = & 1 - 4x + 4x & \text{CL}^* \\
\Leftrightarrow & 15 + 7x & = & 1 & -15 \\
\Leftrightarrow & 15 + 7x - 15 & = & 1 - 15 & \text{CL} \\
\Leftrightarrow & 7x & = & -14 & \div 7 = \cdot \frac{1}{7} \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{7} \cdot 7 \cdot x & = & \frac{1}{7} \cdot (-14) & \text{CL} \\
\Leftrightarrow & \frac{7}{7} \cdot x & = & \frac{-14}{7} & \text{CL} \\
\Leftrightarrow & x & = & -2 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow S = \{-2\}$$

Important Un seul signe égal par ligne !

* CL = calcul littéral

Exemple 1.2 Résoudre $5x + 3 = 4 + 5x$

$$\begin{array}{rrcl|l} & 5x + 3 & = & 4 + 5x & -5x \\ \Leftrightarrow & 5x - 5x + 3 & = & 4 + 5x - 5x & \text{CL} \\ \Leftrightarrow & 0 \cdot x + 3 & = & 4 + 0 \cdot x & \text{CL} \\ \Leftrightarrow & 3 & = & 4 & \end{array}$$

Cette équation n'a pas de solution ! On note $S = \emptyset$

Exemple 1.3 Résoudre $x - 1 = x - 1$

$$\begin{array}{rrcl|l} & x - 1 & = & x - 1 & -x \\ \Leftrightarrow & x - x - 1 & = & x - x - 1 & \text{CL} \\ \Leftrightarrow & 0 \cdot x - 1 & = & 0 \cdot x - 1 & \text{CL} \\ \Leftrightarrow & -1 & = & -1 & \end{array}$$

Cette équation est vraie quel que soit x ! On note $S = \mathbb{R}$

2. Equations du premier degré

Définition 2.1 On appelle équation du premier degré une équation dont le terme de plus haut degré est de degré (=puissance) 1.

Exemple 2.1

- $x + 1 = 4x + 2$ est une équation du premier degré
- $x^2 + 2 = x$ n'est pas une équation du premier degré (mais du deuxième).

Un équation du premier degré peut avoir :

- Une solution ($x = a$),
- Aucune solution ($1 = 0 \Rightarrow S = \emptyset$) ou
- Une infinité de solutions ($0 = 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}$)

Définition 2.2 Deux équations sont dites équivalentes si elles ont le même ensemble de solutions.

Exemple 2.2 Les équations $x+1=2$ et $3x=3$ sont-elles équivalentes ?

Première équation

$$\begin{aligned} x+1 &= 2 \quad \Big| \; -1 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 1 \end{aligned}$$

et donc $S_1 = \{1\}$

Deuxième équation

$$\begin{aligned} 3x &= 3 \quad \Big| \; \div 3 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 1 \end{aligned}$$

et donc $S_2 = \{1\}$

Les deux équations ont donc le même ensemble de solution : $S_1 = S_2 = \{1\}$ et les équations sont donc équivalentes.

Remarque 2.1 Le symbole "$\Leftrightarrow$" placé entre deux équations indique que les équations sont équivalentes.

Liste des opérations équivalentes

- Permutation des deux membres : $2 = 3x \Leftrightarrow 3x = 2$
- Calcul littéral : $3x + x = 4 - 1 \Leftrightarrow 4x = 3$
- Multiplication ou division par un nombre différent de 0 : $\frac{1}{3}x = 1 \Leftrightarrow x = 3$
- Addition ou soustraction d'un terme : $5x - 2 = 0 \Leftrightarrow 5x = 2$

Contre-exemple 2.1 Soit l'équation $x = 1$. On a $S = \{1\}$.

Multiplication par x

$$\begin{array}{rrcl|l} & x & = & 1 & \cdot x \\ \Rightarrow & x^2 & = & x & \end{array}$$

$\Rightarrow S_x = \{0,1\} \neq S = \{1\}$

Equations non équivalentes

Multiplication par 0

$$\begin{array}{rrcl|l} & x & = & 1 & \cdot 0 \\ \Rightarrow & 0 & = & 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow S_0 = \mathbb{R} \neq S = \{1\}$

Equations non équivalentes

Exemple 2.3 Résoudre l'équation $\dfrac{2(x+7)}{3} = \dfrac{38-7x}{4}$

$$\begin{array}{rrcl|l}
 & \dfrac{2(x+7)}{3} & = & \dfrac{38-7x}{4} & \cdot 12 \\
\Leftrightarrow & \dfrac{2(x+7)}{3}\cdot 12 & = & \dfrac{38-7x}{4}\cdot 12 & \text{CL} \\
\Leftrightarrow & 2(x+7)\cdot 4 & = & (38-7x)\cdot 3 & \text{CL} \\
\Leftrightarrow & 8(x+7) & = & 114-21x & \text{CL} \\
\Leftrightarrow & 8x+56 & = & 114-21x & +21x-56 \\
\Leftrightarrow & 29x & = & 58 & \div 29 \\
\Leftrightarrow & x & = & 2 &
\end{array}$$

L'ensemble de solution est donc $S = \{2\}$

3. Résolution de problèmes

Exemple 3.1 Une bouteille de champagne et son bouchon coûtent 110.-. La bouteille coûte 100.- de plus que le bouchon. Quel est le prix de la bouteille et quel est le prix du bouchon ?

La résolution d'un problème se déroule en quatre étapes :

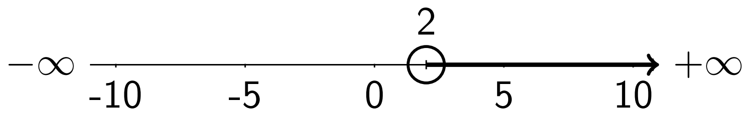
- **Choix de l'inconnue** Posons x le prix de la bouteille, le prix du bouchon est donc donné par $110 - x$
- **Mise en équation** $x = 110 - x + 100$
- **Résolution de l'équation**

$$\begin{array}{rrcl|l}
 & x & = & 110-x+100 & \text{CL} \\
\Leftrightarrow & x & = & 210-x & +x \\
\Leftrightarrow & 2x & = & 210 & \div 2 \\
\Leftrightarrow & x & = & 105 & \qquad \Rightarrow S = \{105\}
\end{array}$$

- **Solution du problème** La bouteille vaut donc 105.- et le bouchon : 110 - 105 = 5.-.

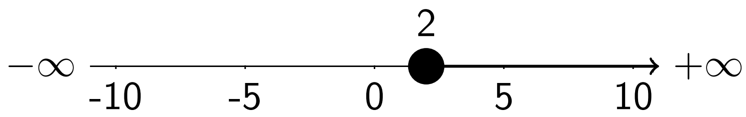
4. Inéquations

Lorsque l'on écrit $\boxed{x > 2}$, il s'agit d'une inéquation. Tous les nombres strictement plus grands que 2 sont des solutions de cette inéquation :



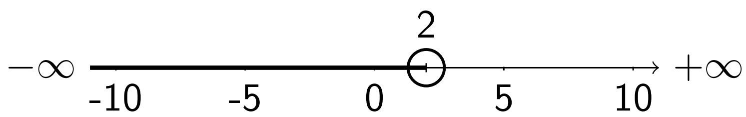
On note la solution $S =]2; +\infty[$ (2 n'est pas compris)

Si l'on considère l'inéquation $\boxed{x \geq 2}$, tous les nombres plus grands ou égaux à 2 sont des solutions :



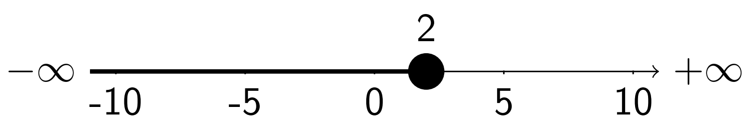
On note $S = [2; +\infty[$ (2 est compris)

Si l'on considère l'inéquation $\boxed{x < 2}$, tous les nombres strictement plus petits que 2 sont des solutions :



On note $S =]-\infty; 2[$ (2 n'est pas compris)

Si l'on considère l'inéquation $\boxed{x \leq 2}$, tous les nombres réels plus petits que 2 sont des solutions :



On note $S =]-\infty; 2]$ (2 est compris)

Exercice 4.1 Résoudre l'équation $2x - 6 = -2$.

$$\begin{array}{rrcl|l}
 & 2x-6 & = & -2 & +6 \\
\Leftrightarrow & 2x-6+6 & = & -2+6 & \text{CN} \\
\Leftrightarrow & 2x & = & 4 & \div 2 \\
\Leftrightarrow & x & = & 2 & \qquad \Rightarrow S = \{2\}
\end{array}$$

Exemple 4.1 Résoudre l'inéquation $2x - 6 > -2$.

$$\begin{array}{rrcl|l}
 & 2x-6 & > & -2 & +6 \\
\Leftrightarrow & 2x-6+6 & > & -2+6 & \text{CN} \\
\Leftrightarrow & 2x & > & 4 & \div 2 \\
\Leftrightarrow & x & > & 2 & \qquad \Rightarrow S = \,]\,2;\infty[
\end{array}$$

Exemple 4.2 Résoudre l'inéquation $-x > 16$.

Première méthode

$$\begin{array}{rrcl|l}
 & -x & > & 16 & +x-16 \\
\Leftrightarrow & -x+x-16 & > & 16+x-16 & CL \\
\Leftrightarrow & -16 & > & x & \leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x & < & -16 & \qquad \Rightarrow S =]-\infty,-16[
\end{array}$$

Deuxième méthode

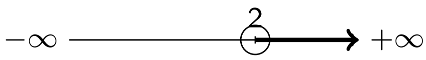
$$\begin{array}{rrcl|l}
 & -x & > & 16 & \cdot(-1) \\
\Leftrightarrow & x & < & -16 & \qquad \Rightarrow S =]-\infty,-16[
\end{array}$$

Règle 4.1 Lorsque l'on multiplie par un nombre négatif une inégalité, il faut changer le sens du signe d'inégalité.

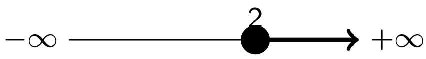
5. Intervalles dans $\mathbb{R}$

Exercice 5.1 Dessiner les solutions des ces inéquations et les écrire sous forme d'intervalle.

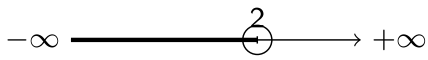
- $x>2 \Rightarrow S =]2, \infty[$



- $x\geq 2 \Rightarrow S = [2, \infty[$



- $x<2 \Rightarrow S =]-\infty, 2[$



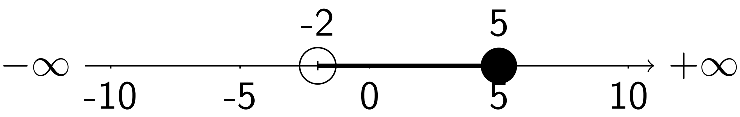
- $x\leq 2 \Rightarrow S =]-\infty, 2]$

Exemple 5.1 Ecrire sous forme d'intervalle l'expression

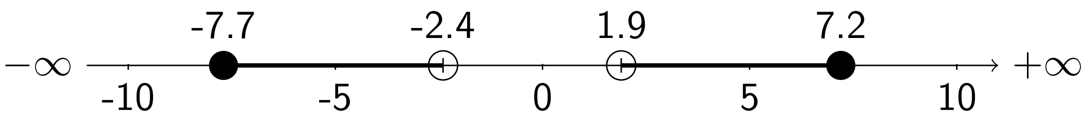
$$-2 < x \leq 5$$

$$-2 < x \leq 5$$

.



Exemple 5.2 Noter sous forme d'intervalle l'ensemble illustré ci-dessous :



On utilise le symbole $\cup$ ("union") pour dénoter la réunion de deux intervalles :

$$S = [-7.7; -2.4[\cup]1.9; 7.2]$$