GYMNASE DE BURIER

Chapitre 4 - Limites et Asymptotes

Sarah Dégallier Rochat

Références
H. Bovet, "Analyse", Polymaths, 2002
Notes du cours donné par M. Gelsomino (2005-2008), Gymnase de Burier

1. Valeurs interdites et asymptotes verticales

Exemple 1.1 Etudier la fonction $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$.

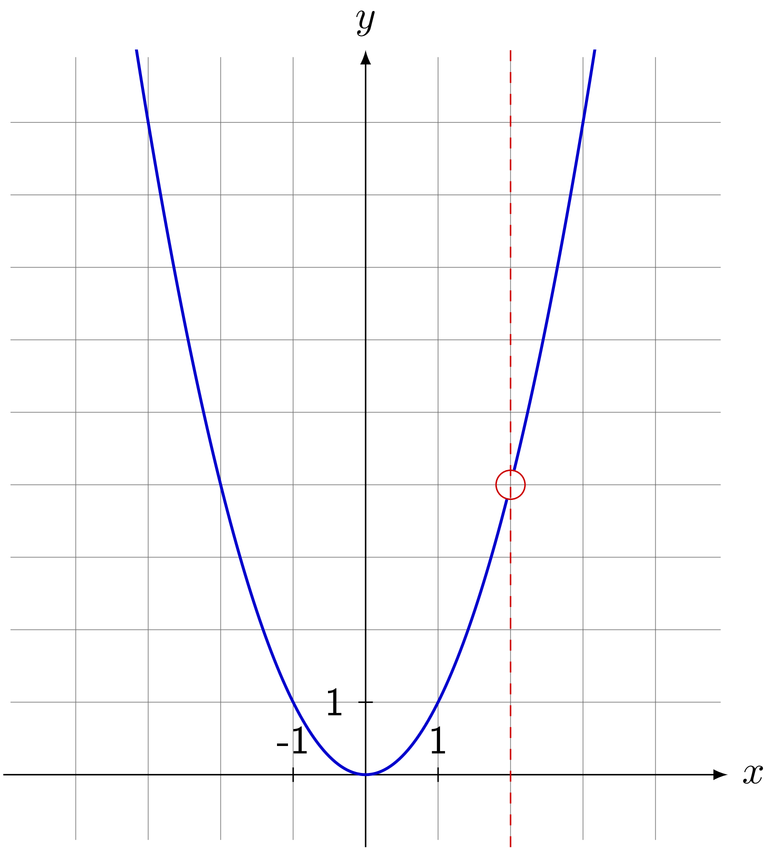
La fonction est rationnelle et $ED(f) = \mathbb{R}\backslash\{2\}$. Calculons les zéros de cette fonction :

$$x^3 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 2) = 0$$

Les solutions de cette équation sont 0 et 2, mais 2 n'est pas dans l'ensemble de définition, le seul zéro est donc 0. On fait le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	‖	$+$	
$x-2$		$-$		$-$	‖	$+$	
$x-2$		$-$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$+$	‖	$+$	

x	f(x)
-3	*9*
-2	*4*
-1	*1*
0	*0*
1	*1*
2	*indéfini*
3	*9*



x	f(x)
1.5	*2.25*
1.9	*3.61*
1.99	*3.9601*
2.001	*4.004001*
2.5	*6.25*

En résumé, plus on s'approche de 2, plus la fonction s'approche de 4. On le notera

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2}{x-2} = 4$$

On dit que la fonction admet un ***trou*** *en* $x=2$.

Par calcul, on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2}{x-2} &= \frac{2^3-2\cdot 2^2}{2-2} = \underbrace{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}_{\textit{indéterminé}} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{x^2(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x^2 = 4\end{aligned}$$

La limite à droite de la valeur interdite n'est pas toujours la même que celle à gauche. On distingue donc les deux limites :

1. limite à gauche :
$$\lim_{x\to 2_-} \frac{x^3-2x^2}{x-2} = 4$$
2. limite à droite :
$$\lim_{x\to 2_+} \frac{x^3-2x^2}{x-2} = 4$$

Si les limites à gauche et à droite sont identiques, on note simplement
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2}{x-2} = 4$$

Exercice 1.1 Calculer les limites suivantes :

1. $$\lim_{x\to 3}(x^2-5x+2) = 3^2 - 5\cdot 3 + 2 = -4$$

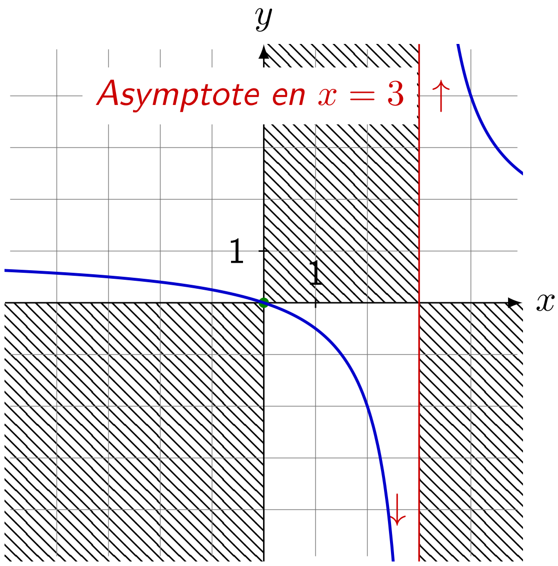
2. $$\begin{aligned} \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1} &= \frac{(-1)^2-1}{-1+1} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \\ &= \lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x\to -1}(x-1) = (-1-1) = -2 \\ &\Rightarrow \text{Trou en } (-1,-2) \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x+3} &= \frac{(-3)^2+(-3)-6}{-3+3} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \\ &= \lim_{x\to -3}\frac{(x-2)(x+3)}{x+3} \\ &= \lim_{x\to -3}(x-2) = (-3-2) = -5 \\ &\Rightarrow \text{Trou en } (-3,-5) \end{aligned}$$

Exemple 1.2 Etudier la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$.

1. *ED(f)* $= \mathbb{R}\backslash\{3\}$
2. *Zéros :* $x = 0 \Rightarrow Z(0;0)$
3. *Ordonnée à l'origine :* $f(0) = 0 \Rightarrow H(0;0)$
4. *Etude de signes*

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	‖	$+$
$x-3$	$-$		$-$	‖	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$



Etudier le comportement de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$ autour de 3.

- $f(2) = -2$
- $f(2.5) = -5$
- $f(2.9) = -29$
- $f(2.99) = -299$

$$\lim_{x\to 3_-} \frac{x}{x-3} = -\infty$$

Limite à gauche

- $f(4) = 4$
- $f(3.5) = 7$
- $f(3.1) = 31$
- $f(3.01) = 301$

$$\lim_{x\to 3_+} \frac{x}{x-3} = \infty$$

Limite à droite

Par calcul :

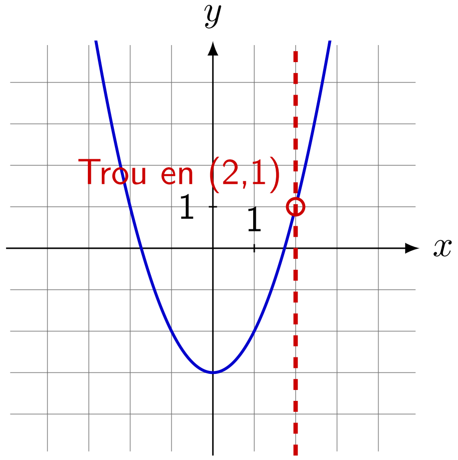
$$\lim_{x\to 3_-} \frac{x}{x-3} = \text{"}\frac{3}{0_-}\text{"} = -\infty \qquad \lim_{x\to 3_+} \frac{x}{x-3} = \text{"}\frac{3}{0_+}\text{"} = \infty$$

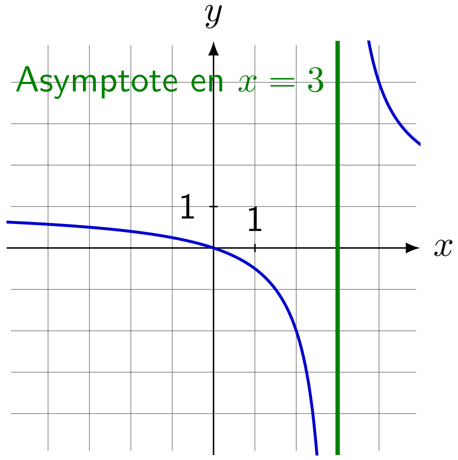
Pour trouver le signe de la limite, on peut s'aider du tableau de signes. On dit que $f(x)$ admet une asymptote verticale en $x = 3$.

Synthèse 1.1 Lorsque l'on étudie le comportement d'une fonction rationnelle en **ses valeurs interdites**, deux cas sont possibles :

1. le trou : la limite tend vers un nombre.
2. l'asymptote : la limite tend vers $\pm\infty$.

Graphiquement,





Exercice 1.2 Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(x) = \dfrac{x+4}{(x+4)(x-4)}$. Calculer sa limite en -4_+, 0_+ et 4_+. Indiquer les asymptotes et les trous le cas échéant.

On observe que $ED(f) = \mathbb{R}\backslash\{-4, 4\}$. Calculons la limite en -4_+ :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -4_+} \frac{x+4}{(x+4)(x-4)} &= \text{,,}\frac{0}{0}\text{,,} = \lim_{x\to -4_+} \frac{x+4}{(x+4)(x-4)} \\ &= \lim_{x\to -4_+} \frac{1}{(x-4)} = -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

On a un trou en $\left(-4; -\dfrac{1}{8}\right)$. Calculons la limite en 0_+ :

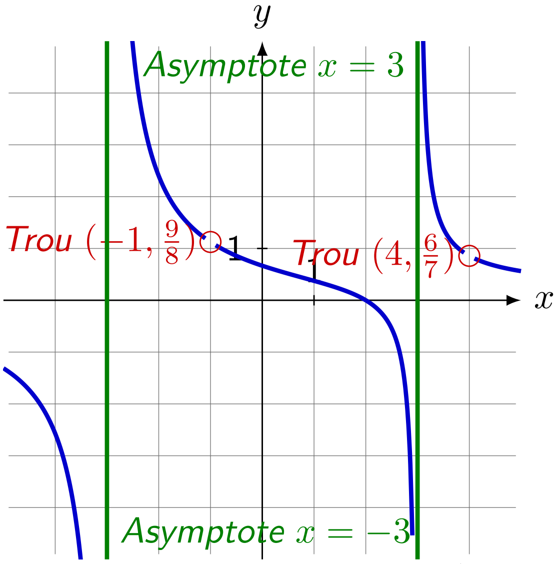
$$\lim_{x\to 0_+} \frac{x+4}{(x+4)(x-4)} = \frac{4}{-16} = -\frac{1}{4}$$

*C'est un point normal du graphe (0 **n'est pas** une valeur interdite). Calculons la limite en 4_+ :*

$$\lim_{x\to 4_+} \frac{x+4}{(x+4)(x-4)} = \text{,,}\frac{8}{0_+}\text{,,} = \infty$$

On a une asymptote verticale d'équation $x = 4$.

Exercice 1.3 Indiquer sur le graphe suivant les trous et les asymptotes de la fonction représentée. En déduire une expression possible de la fonction.



Les trous et les asymptotes apparaissent aux valeurs interdites :

$$ED(f) = \mathbb{R}\backslash\{-3, -1, 3, 4\}$$

De plus, -1 et 4 étant des trous, ce sont aussi des zéros du numérateur.

On a donc $f(x) = \dfrac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-4)(x-3)(x+3)}$

Exemple 1.3 Etudier la fonction $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x^2+3x+2}$ et esquisser son graphe.

On commence par factoriser la fonction :

$$f(x) = \frac{4-x^2}{x^2+3x+2} = \frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(x+1)}$$

1. $ED(f) = \mathbb{R}\backslash\{-2; -1\}$
2. *Zéros :* $2 \Rightarrow Z(2; 0)$ $\quad(-2 \notin ED(f))$
3. *Ordonnée à l'origine :* $f(0) = \dfrac{4}{2} = 2 \Rightarrow H(0; 2)$
4. *Etude de signes*

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$2+x$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Vérifions le comportement de la fonction en ses valeurs interdites

$$1. \quad \lim_{x\to -2} \frac{4-x^2}{x^2+3x+2} = \frac{4-4}{4-6+2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$
$$= \lim_{x\to -2} \frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to -2} \frac{2-x}{x+1}$$
$$= \frac{(2-(-2))}{((-2)+1)} = -4$$

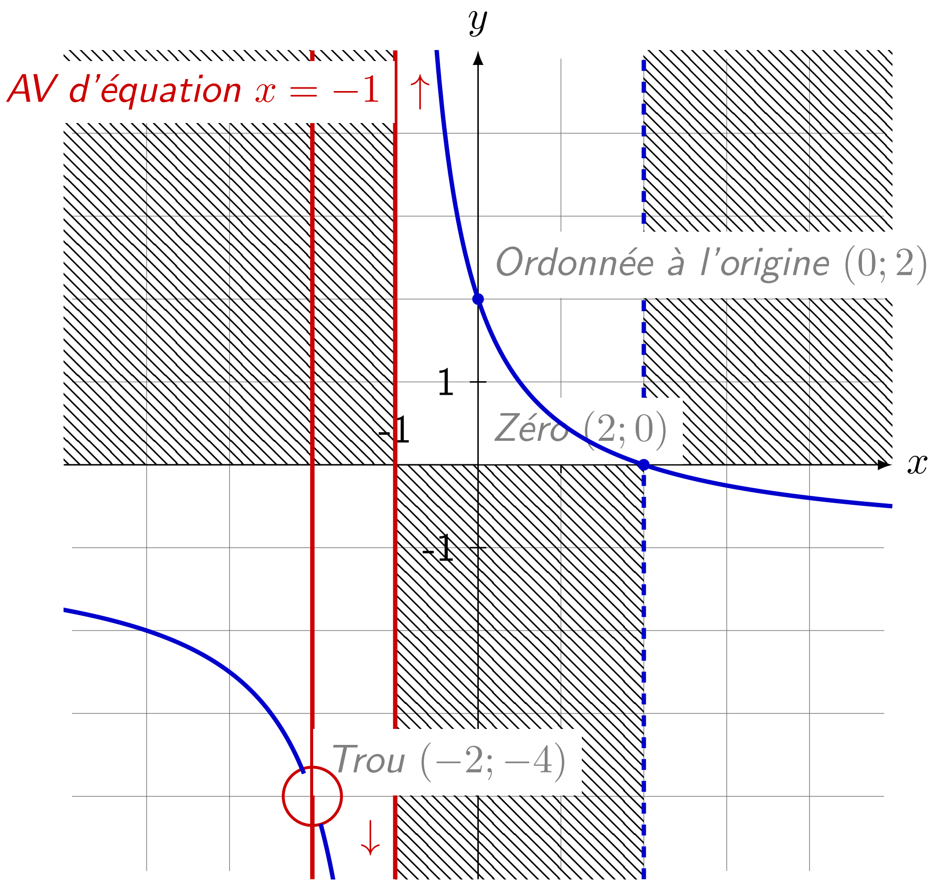
⇒ *Trou en (-2;-4)*

$$2. \quad \lim_{x\to -1} \frac{4-x^2}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -1} \frac{2-x}{x+1} = \text{"}\frac{3}{0}\text{"}$$

Limite à gauche : $\lim_{x\to -1_-} \frac{2-x}{x+1} = \frac{2-(-1_-)}{-1_-+1} = \frac{3_+}{0_-} = -\infty \quad \downarrow$

Limite à droite : $\lim_{x\to -1_+} \frac{2-x}{x+1} = \frac{2-(-1_+)}{-1_++1} = \frac{3_-}{0_+} = +\infty \quad \uparrow$

⇒ Asymptote verticale d'équation $x = -1$



2. Comportement à l'infini et asymptotes horizontales

Exemple 2.1 Calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to\infty} x^3 + x^2 + 2x - 3 \quad = \quad \lim_{x\to\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$$

Remarque 1.1 A l'infini, une fonction polynomiale se comporte comme son terme de plus haut degré.

Exercice 2.1 Calculer les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 4x^2 - 2}{5x^3 - 3x^2 + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{5x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

   Asymptote horizontale (AH) d'équation $y = \dfrac{2}{5}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{4x^4 + 7}{7x^5 - 12} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^4}{7x^5} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{7x} = 0$

   AH d'équation $y = 0$

3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^5 - 3x + 1}{12x^2 + 2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^5}{12x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{12} = -\infty$

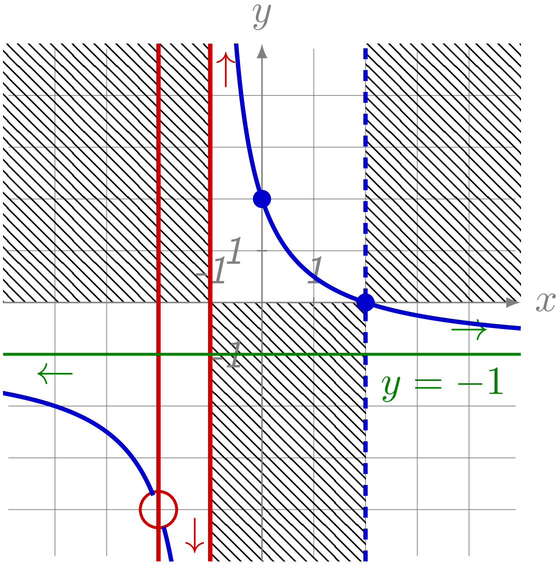
   Pas d'asymptote horizontale

Remarque 2.2 Un fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ a une asymptote horizontale en $y = b$ si $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}$. Cette limite est la même à droite et à gauche.

Exercice 2.1 Vérifier si la fonction de l'Exercice 1.3 possède une asymptote horizontale.

On calcule la limite $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4-x^2}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$

La fonction possède une asymptote horizontale en $y=-1$.



On étudie la position relative de la courbe :

1. $f(1000) = -0.997 > -1$
   $\Rightarrow$ *A droite en dessus*
2. $f(-1000) = -1.003 < -1$
   $\Rightarrow$ *A gauche en dessous*

3. Comportement à l'infini et asymptotes obliques

Soit $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ une fonction rationnelle. Dans le cas où la fonction n'a pas d'asymptote horizontale d'un côté ou d'un autre, elle peut avoir une asymptote oblique (AO). C'est le cas lorsque le **degré de** $N(x)$ est égal au **degré de** $D(x)$ **+ 1**. On trouve les asymptotes oblique en effectuant la division euclidienne.

Exemple 3.1 Les fonctions suivantes admettent-elles une asymptote oblique ?

1. $f(x) = \dfrac{x^4+5}{x^2-1}$
   Degré $N(x) = 4 \neq 2+1 =$ *Degré* $D(x)+1 \to$ *pas d'AO.*
2. $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+1}{x^2+1}$
   Degré $N(x) = 3 = 2+1 =$ *Degré* $D(x)+1 \to$ *AO !*

Exemple 3.2 Calculer l'asymptote oblique qu'admet la fonction

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

On fait la division euclidienne :

$$\begin{array}{cccc|c}
x^3 & +2x^2 & & +1 & x^2+1 \\
-x^3 & & -x & & \hline x+2 \\
\hline
0 & 2x^2 & -x & +1 & \\
0 & -2x^2 & & -2 & \\
\hline
0 & 0 & -x & -1 &
\end{array}$$

On peut donc écrire $\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1} = x + 2 + \frac{-x-1}{x^2+1}$
Il y a donc une asymptote oblique d'équation $y = x + 2$.

4. Etudes de fonction avec asymptotes

Règle des degrés Soit $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ une fonction rationnelle. Soit de plus $\deg(N(x))$ le degré du numérateur et $\deg(D(x))$ le degré du dénominateur. Alors

1. Si $\deg(N(x)) < \deg(D(x))$, la fonction admet une asymptote horizontale en $y = 0$.
2. Si $\deg(N(x)) = \deg(D(x))$, la fonction admet une asymptote horizontale en $y = \frac{a}{b}$, où a et b sont les coefficients du terme de plus haut degré de $N(x)$ et $D(x)$ respectivement.
3. Si $\deg(N(x)) = \deg(D(x))+1$, la fonction admet une asymptote oblique dont l'équation correspond au quotient de $\frac{N(x)}{D(x)}$.
4. Si $\deg(N(x)) > \deg(D(x))+1$, la fonction n'admet pas d'asymptote.

Plan d'étude d'une fonction

a) ED(f), zéros, ordonnée à l'origine et signes

b) Recherche des asymptotes

   i) Asymptotes verticales ou trous aux valeurs interdites

   ii) Asymptote horizontale lorsque $x \to \infty$

   iii) Asymptote oblique lorsque $x \to \infty$

c) Hachurage des zones exclues de la fonction

d) Placement des asymptotes

e) Placements de points trouvés (zéros, ordonnée à l'origine)

f) Esquisse de la fonction

Remarque 4.1 Contrairement aux asymptotes verticales qui sont "infranchissables", la courbe de la fonction peut traverser les asymptotes horizontales et obliques.

Exemple 4.1 Etudier la fonction $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-2x-3}$ et esquisser son graphe.

On commence par factoriser la fonction :

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-2x-3} = \frac{(x-1)\overbrace{(x^2+x+1)}^{\Delta=-3<0}}{(x-3)(x+1)}$$

1. *ED(f)* $= \mathbb{R}\backslash\{-1;3\}$
2. *Zéro :* $S = \{1\}$ *(*x^2+x+1 *pas plus factorisable)*
3. *Ordonnée à l'origine :* $f(0) = \dfrac{-1}{-3} = \dfrac{1}{3}$.
4. *Tableau de signes :*

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
x^2+x+1		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	$\Vert$	$+$	
$x-3$		$-$	$\Vert$	$-$		$-$	$\Vert$	$+$	
$x+1$		$-$	$\Vert$	$+$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

On vérifie s'il y a des asymptotes verticales aux valeurs interdites :

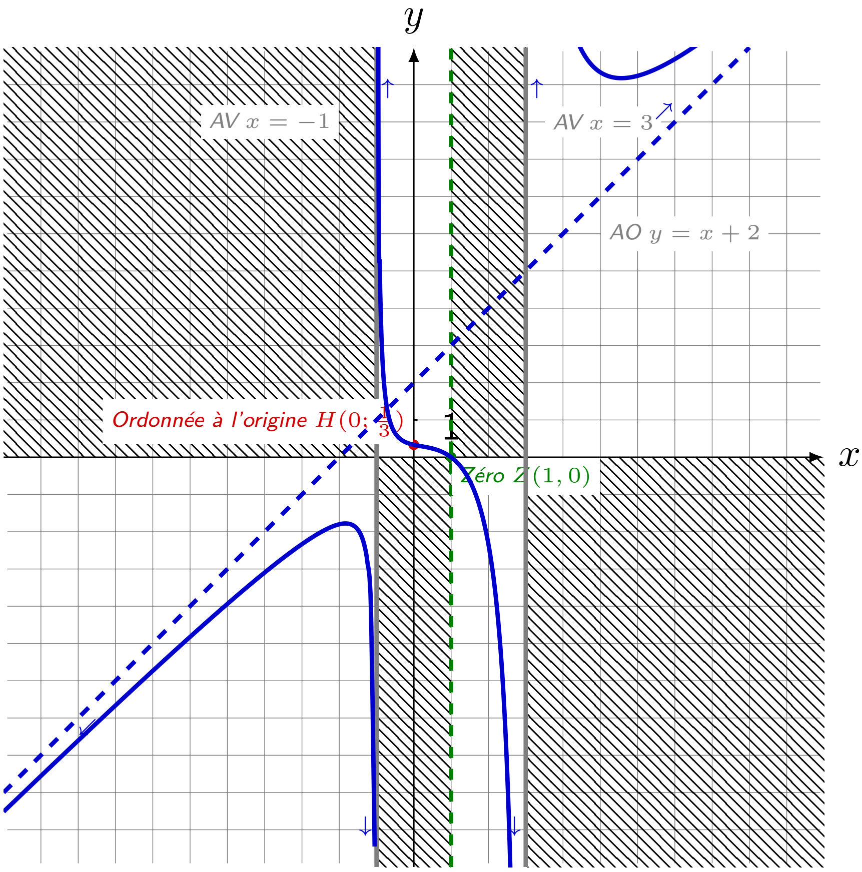
1. $\displaystyle\lim_{x\to 3_-} \frac{x^3-1}{x^2-2x-3} = „\frac{26}{0_-}" = -\infty$
   $\Rightarrow$ *AV en* $x = 3$ *à gauche* $\downarrow$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 3_+} \frac{x^3-1}{x^2-2x-3} = „\frac{26}{0_+}" = \infty$
   $\Rightarrow$ *AV en* $x = 3$ *à droite* $\uparrow$
3. $\displaystyle\lim_{x\to -1_-} \frac{x^3-1}{x^2-2x-3} = „\frac{-2}{0_+}" = -\infty$
   $\Rightarrow$ *AV en* $x = -1$ *à gauche* $\downarrow$
4. $\displaystyle\lim_{x\to -1_+} \frac{x^3-1}{x^2-2x-3} = „\frac{-2}{0_-}" = \infty$
   $\Rightarrow$ *AV en* $x = -1$ *à droite* $\uparrow$

Par la règle des degrés, il n'y a pas d'asymptote horizontale, mais il y a une asymptote oblique (deg($N(x)$) = deg($D(x)$)+1) :

$$
\begin{array}{cccc|c}
x^3 & & & -1 & x^2-2x-3 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +2x^2 & +3x & & x+2 \\ \cline{1-4}
0 & 2x^2 & +3x & -1 & \\
0 & -2x^2 & +4x & +6 & \\ \cline{1-4}
0 & 0 & 7x & +5 &
\end{array}
$$

AO d'équation $y = x + 2$
Position relative de la courbe :

1. $f(1000) = 1002.007 > y = 1000 + 2 = 1002$
   $\Rightarrow$ *A droite au-dessus !*
2. $f(-1000) = -998.006 < y = -1000 + 2 = -998$
   $\Rightarrow$ *A gauche au-dessous !*


y
x
AV $x = -1$
AV $x = 3$
AO $y = x + 2$
Ordonnée à l'origine $H(0; \frac{1}{3})$
1
Zéro $Z(1, 0)$