GYMNASE DE BURIER

Chapitre 4 - Fonctions

Sarah Dégallier Rochat

Références
H. Bovet, "Analyse", Polymaths, 2002
Notes du cours donné par M. Gelsomino (2005-2008), Gymnase de Burier

1. La notion de fonction

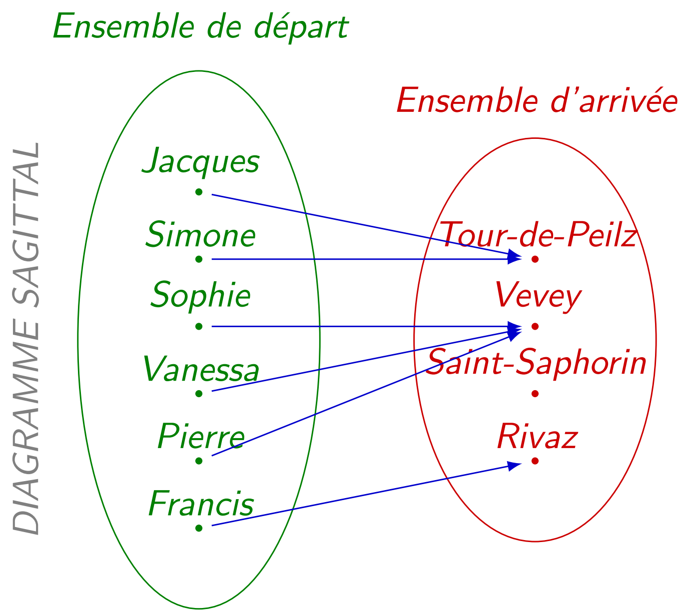
Définition 1.1 Une fonction f d'un ensemble D dans un ensemble A est une correspondance qui associe **à chaque élément de D un et un seul élément de A**.
On note

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow A \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

où l'on appelle

- D : l'ensemble de départ
- A : l'ensemble d'arrivée
- f(x) : l'expression fonctionnelle de f

Exemple 1.1 Des élèves de Burier prennent le train pour rentrer chez eux. Jacques et Simone descendent à La Tour-de-Peilz, Sophie, Vanessa et Pierre à Vevey et Francis à Rivaz. Personne ne descend à Saint-Saphorin.



La relation associant les passagers à leur destination est une fonction. En effet, tous les passagers descendent à **un et un seul arrêt**. *Toutes les personnes doivent descendre du train et elles ne peuvent descendre qu'à un seul arrêt.*

Définition 1.2 Soit la fonction f donnée par

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow A \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

1. $y = f(x)$ est l'image de x par f.
2. x est la préimage de y.
3. L'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble des éléments de A qui ont une préimage.
4. L'image réciproque de y, notée ${}^r f(y)$ ou $f^{-1}(y)$, est l'**ensemble** des éléments de D qui ont y pour image.

Une fonction peut aussi être donnée par son graphe G(f)

$$G(f) = \{(x; f(x)) | x \in D\}$$

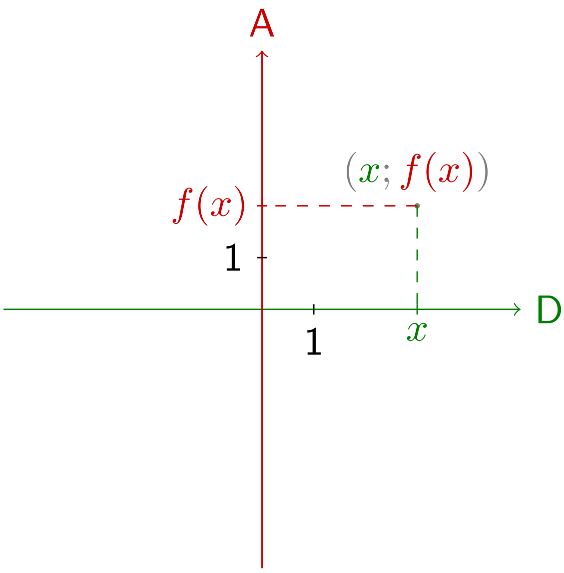
Exercice 1.1 Dans l'exemple du train, donner

1. l'image de Pierre : f(*Pierre*) = *Vevey*
2. l'image de la fonction :
   Im(f) = { *La Tour-de-Peilz*, *Vevey*, *Rivaz* }
3. la préimage de Rivaz : *Francis*
4. l'image réciproque de la Tour-de-Peilz :
   $^r f$(*La Tour-de-Peilz*) = { *Jacques*, *Simone* }
5. l'image réciproque de Saint-Saphorin :
   $^r f$(*Saint-Saphorin*) = $\emptyset$
6. le graphe de la fonction :
   $G(f)$ = { (*Jacques*, *La Tour-de-Peilz*) ;
   (*Simone*, *La Tour-de-Peilz*) ; (*Sophie*, *Vevey*) ;
   (*Vanessa*, *Vevey*) ; (*Pierre*, *Vevey*) ; (*Francis*, *Rivaz*) }

2. Les fonctions réelles

Lorsque les ensembles de départ D et d'arrivée A d'une fonction sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, on dit que la fonction est réelle. L'analyse est la discipline des maths qui étudie les fonctions réelles.

Pour représenter le graphe $G(f) = \{(x; f(x)) | x \in D\}$ d'une fonctions réelle, on utilise un système d'axes perpendiculaires.

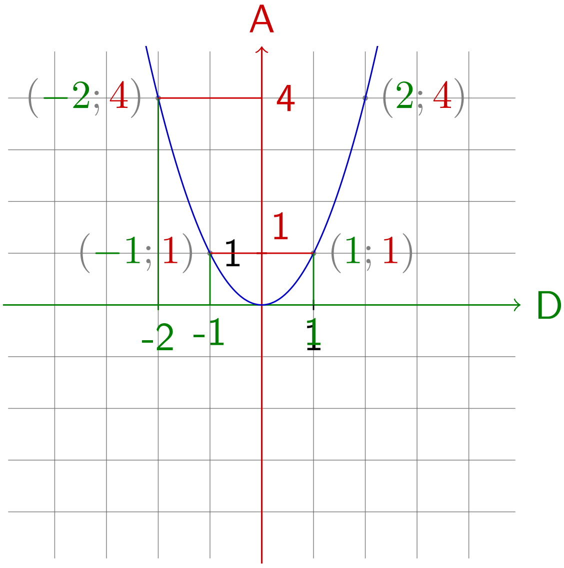


On place l'ensemble de départ D sur l'axe horizontal (abscisse) et l'ensemble d'arrivée A sur l'axe vertical (ordonnées).

Exemple 2.1 Dessiner le graphe de la fonction

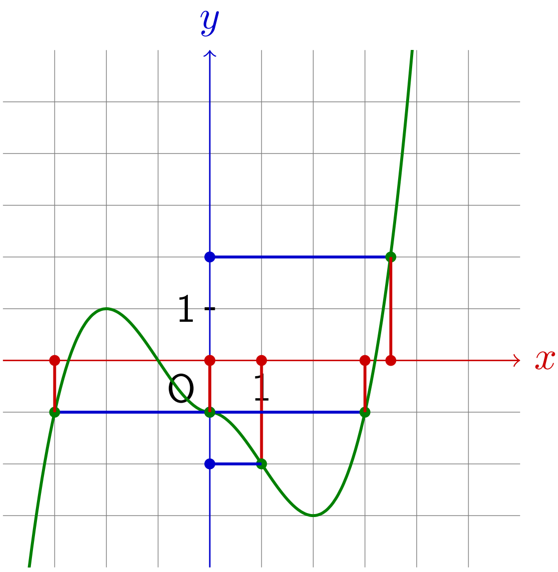
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

et répondre aux questions suivantes.



1. $f(-2) = 4$
2. ${}^r f(1) = \{-1\,;\,1\}$
3. $Im(f) = \mathbb{R}_+$

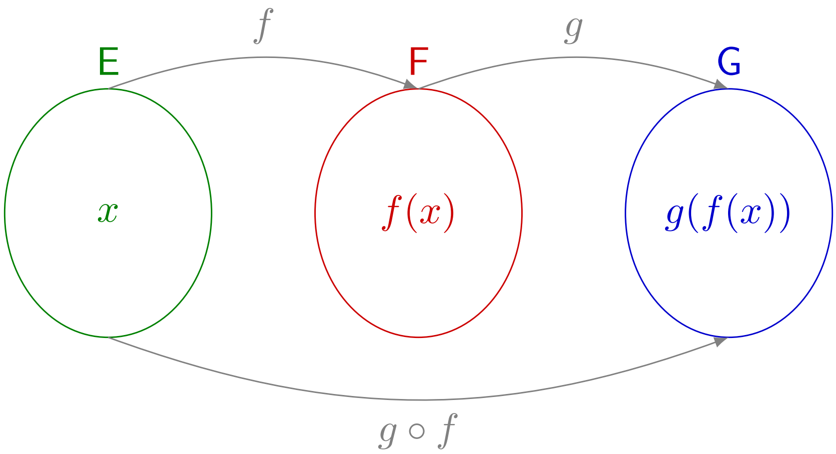
Exercice 2.1 Estimer les valeurs suivantes en observant le graphe.



1. $f(0) = -1$
2. $f(1) = -2$
3. ${}^r f(2) = \{\frac{7}{2}\}$
4. ${}^r f(-1) = \{-3;\, 0;\, 3\}$

3. La composition de fonctions

Définition 3.1 Soit deux fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to G$, on définit la composée de g avec f comme $g \circ f(x) = g(f(x))$.



Remarque 3.1 Dans l'expression $g \circ f$, c'est toujours la **dernière fonction** (ici f) qui s'applique en premier, contrairement au sens de lecture.

Exemple 3.1 Soit les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x-1. \end{array}$$

Donner la valeur ou l'expression générale des termes suivants :

1. $g \circ f(-2) = g(f(-2)) = g((-2)^2) = g(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$
2. $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 3 \cdot x^2 - 1 = 3x^2 - 1$
3. $g \circ f(5) = 3 \cdot 5^2 - 1 = 3 \cdot 25 - 1 = 74$
4. $f \circ g(-2) = f(g(-2)) = f(3 \cdot (-2) - 1) = f(-7) = (-7)^2 = 49$
5. $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(3x-1) = (3x-1)^2$
6. $f \circ g(5) = (3 \cdot 5 - 1)^2 = 14^2 = 196$

4. L'ensemble de définition ED(f)

Exemple 4.1 Soit la relation $x \mapsto \frac{1}{x}$. Donner le plus grand ensemble de départ possible pour que cette relation soit une fonction (réelle).

On sait que dans une fonction chaque élément de l'ensemble de départ doit avoir une image.

Or, $\frac{1}{x}$ n'est pas défini lorsque $x = 0$. 0 n'a donc pas d'image. On doit donc l'enlever de l'ensemble de départ pour que la relation soit une fonction. On a donc

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Définition 4.1 L'ensemble de définition d'une fonction f est composé de tous les éléments de $\mathbb{R}$ qui possèdent une image. Autrement dit, il s'agit de tous les nombres pour lesquels la fonction est définie. On le note $ED(f)$.

Exercice 4.1 Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto 3x^2 - 7x + 3$ $\quad ED(f) = \mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{4}{x+3}$ $\quad ED(f) = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{4}{x^2 - 25}$ $\quad ED(f) = \mathbb{R}\backslash\{-5; 5\}$
4. $f : x \mapsto \sqrt{x}$ $\quad ED(f) = \mathbb{R}_+$
5. $f : x \mapsto \log(x)$ $\quad ED(f) = \mathbb{R}_+^*$

Plus généralement :

1. Si la fonction est polynomiale :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

   tous les nombres ont une image.

   Exemple $f(x) = 4x^7 - 3x + 7 \quad ED(f) = \mathbb{R}$

2. Si la fonction est rationnelle : $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, il faut enlever toutes les valeurs qui annulent le dénominateur $D(x)$.

   Exemple $f(x) = \frac{x+1}{x-4} \quad ED(f) = \mathbb{R} \backslash \{4\}$

3. Si la fonction est irrationnelle : $f(x) = \sqrt{R(x)}$, il faut enlever toutes les valeurs pour lesquelles $R(x) < 0$.

   Exemple $f(x) = \sqrt{x-7} \quad ED(f) = [7; +\infty[$

4. Si la fonction est logarithmique : $f(x) = \log_a(P(X))$, il faut enlever enlever toutes les valeurs pour lesquelle $P(x) \leq 0$.

   Exemple $f(x) = \log_2 2 - x \quad ED(f) =]-\infty; 2[$

5. Etudes de fonction

Lorsque l'on **étudie une fonction** f, les premières étapes sont les suivantes :

1. Rechercher l'ensemble de défintion $ED(f)$
2. Rechercher les zéros de la fonction (les valeurs telles que $f(x) = 0$)
3. Rechercher l'ordonnée à l'origine $(f(0))$ si $0 \in ED(f)$
4. Etudier le signe de la fonction (par un tableau de signes)

L'étude de fonction nous renseigne sur sa **représentation graphique**.

1. L'ensemble de définition indique où la fonction est définie
2. Les zéros indiquent où la courbe traverse l'axe des x
3. L'ordonnée à l'origine indique où la courbe traverse l'axe des y
4. Le signe de la fonction indique si la courbe est au-dessus $(+)$ ou au-dessous (-) de l'axe des x

Exemple 5.1 Etudier la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et esquisser son graphe.

On commence par chercher ED(f). La fonction est définie lorsque

$$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) \geq 0$$

Les zéros sont -1 et 1. On doit faire un tableau de signes :

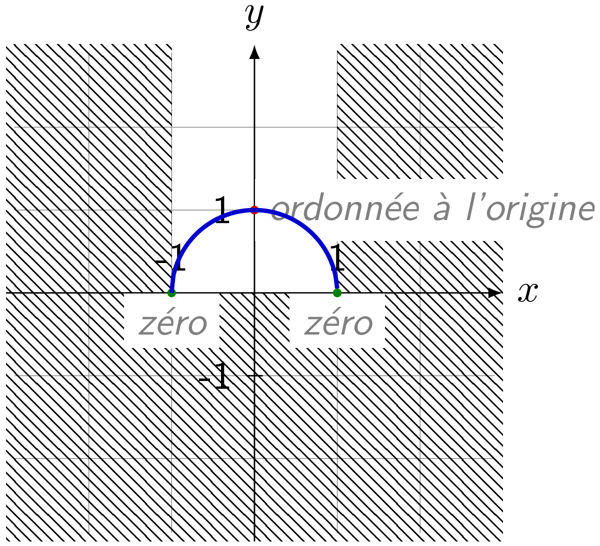
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble de définition est donc $ED(f) = [-1;1]$. *L'ordonnée à l'origine vaut*

$$f(0) = \sqrt{1-0^2} = 1$$

En résumé, l'ordonnée à l'origine vaut *1* et l'on a :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$				



<u>Exercice 5.1</u> Etudier la fonction $f(x) = x^3 - 4x$ et esquisser son graphe.

C'est une fonction polynomiale, donc $ED(f) = \mathbb{R}$. On cherche les zéros (on résoud $f(x) = 0$) :

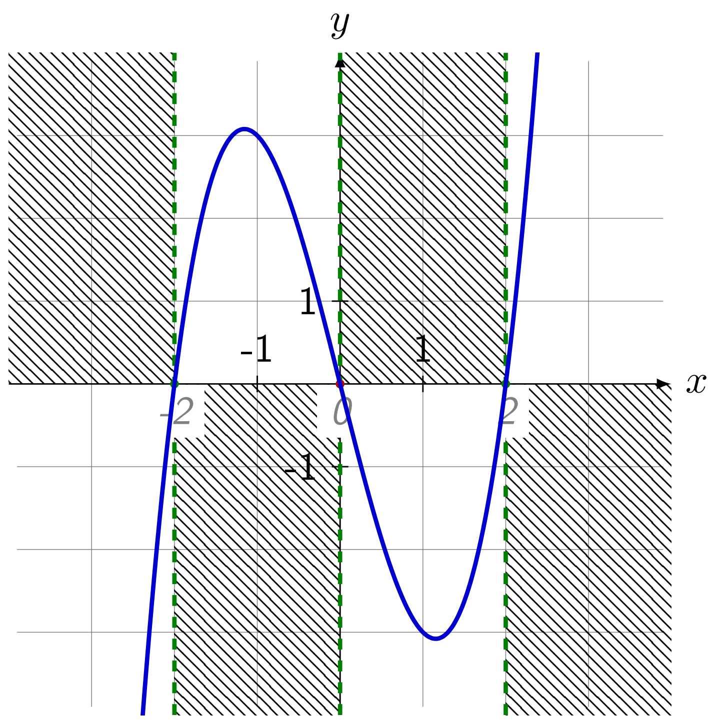
$$\begin{array}{rrcl|l} & x^3 - 4x & = & 0 & \textit{MEE} \\ \Leftrightarrow & x(x^2-4) & = & 0 & \textit{PR}[A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)] \\ \Leftrightarrow & x(x-2)(x+2) & = & 0 & \Rightarrow S = \{-2; 0; 2\} \end{array}$$

On fait le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ordonnée à l'origine vaut

$$f(0) = 0^3 - 4 \cdot 0 = 0$$



Exemple 5.2 Etudier la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-1}$ et esquisser son graphe.

On a $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-1}\dfrac{x^2+2}{(x+1)(x-1)}$. *On a donc* $ED(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.

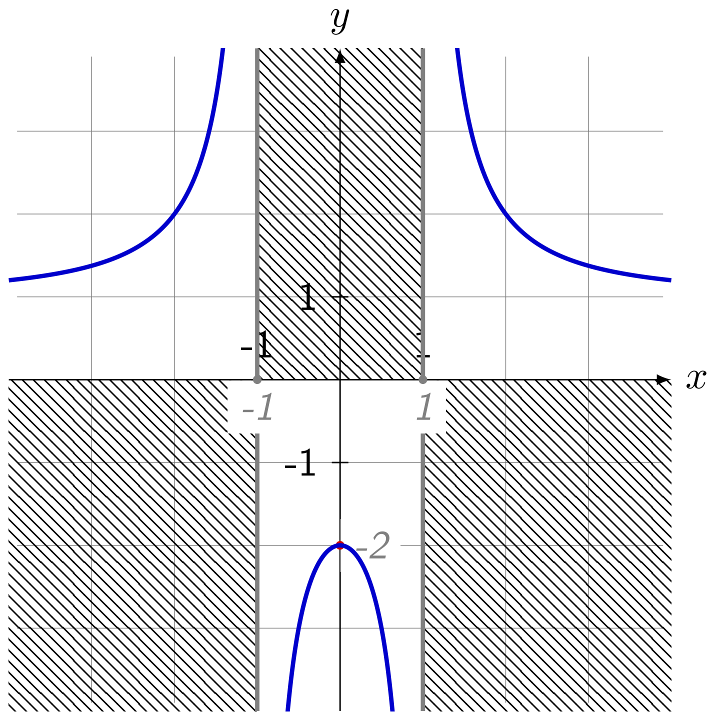
On cherche les zéros (on résoud $f(x) = 0$*) :*

$$\begin{array}{rrcl|l} & x^2+2 & = & 0 & \Delta \\ \Leftrightarrow & \underbrace{x^2+2}_{\Delta<0} & = & 0 & \qquad \Rightarrow S = \emptyset \end{array}$$

On fait le tableau de signes :

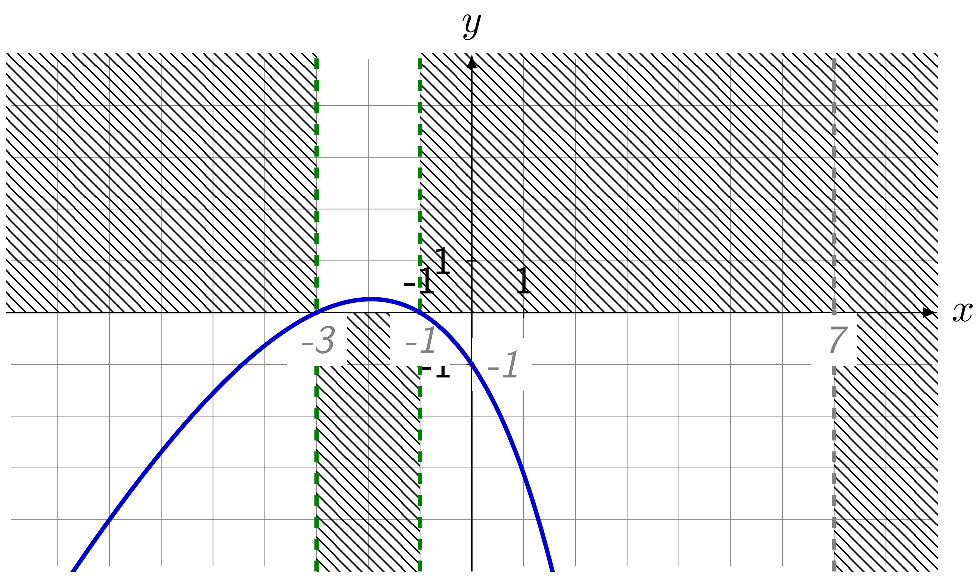
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x^2+2	$+$	$+$	$+$	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$+$	
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	

L'ordonnée à l'origine vaut $f(0) = \dfrac{0^2+2}{0^2-1} = -2$.



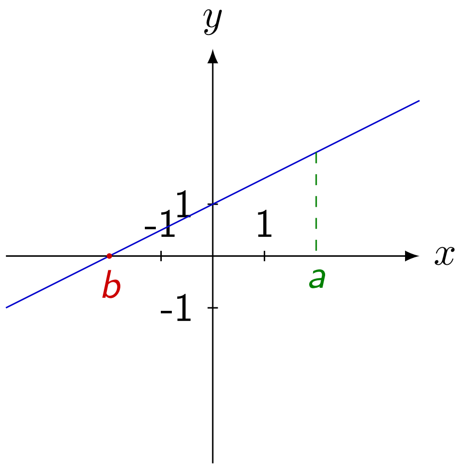
Exercice 5.2 Sur la base des informations suivantes, esquisser le graphe de f. On sait que $ED(f) =]-\infty; 7[$, $f(0) = -1$ et

x	$-\infty$		-3		-1		7	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	//////

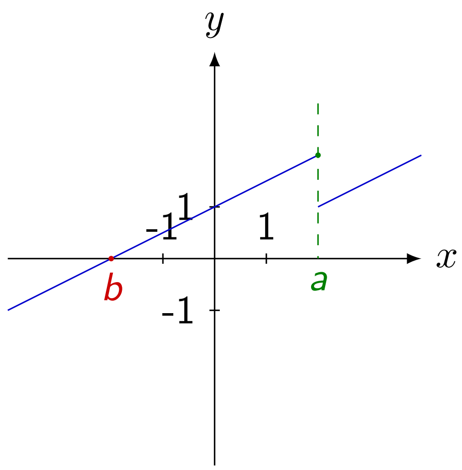


6. Continuité

Définition 6.1 On dit qu'une fonction est continue en un point si on peut la "dessiner sans lever le crayon" au voisinage de ce point. Une fonction continue en tout point de son domaine de définition est dite continue.



f est continue en a et en b.

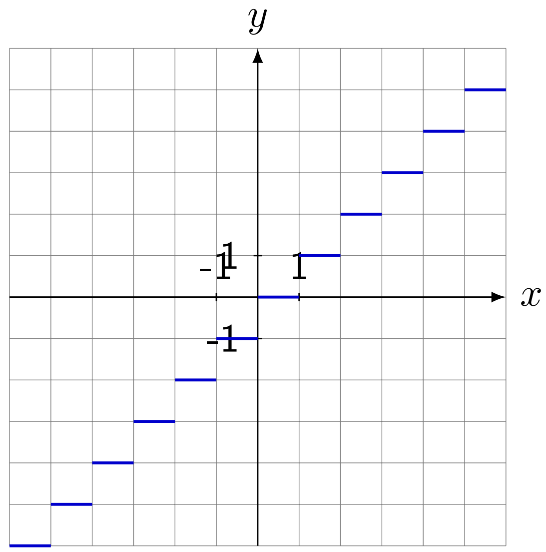


f est continue en b mais discontinue en a.

Définition 6.2 La fonction "partie entière" pour une valeur x est le nombre entier n tel que $n \leq x \leq n+1$. On note $f(x) = [x]$. Par exemple,

$$[2.7] = 2 \qquad [-3.515] = -4 \qquad [6] = 6$$

Exemple 6.1 Dessiner le graphe de la fonction réelle $f(x) = [x]$.
Est-elle continue ? *Non, elle est discontinue pour chaque $x \in \mathbb{Z}$.*



Remarque 6.1 La notion de continuité n'a de sens que dans le domaine de définition de la fonction. Il ne faut donc pas confondre discontinu en un point et non-défini en un point.

Exemple 6.2 Esquisser le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$.
Est-elle continue ? *Oui, elle est continue. En effet, elle n'est pas définie en 2, mais elle continue en tous les points de son domaine de définition ($ED(f) = \mathbb{R}\backslash\{2\}$).*