GYMNASE DE BURIER

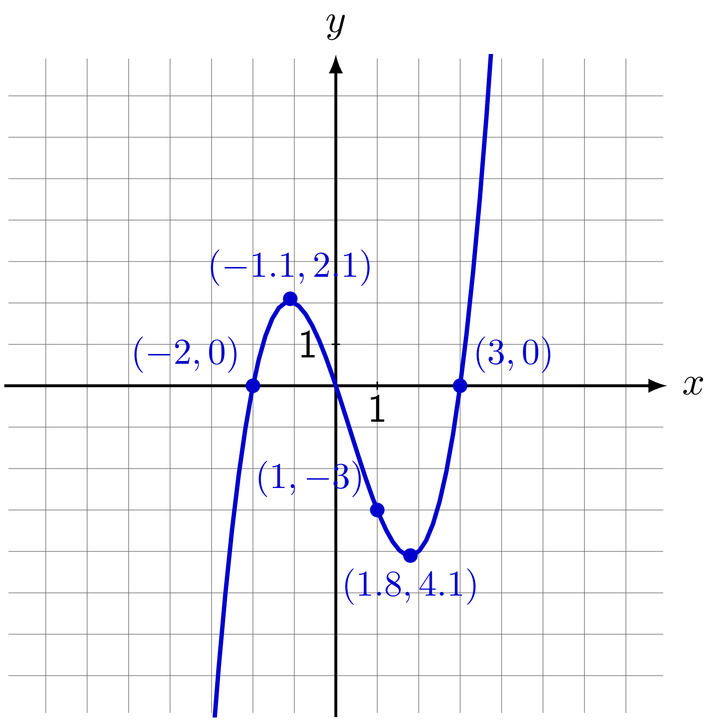
Chapitre 4 - Calcul Différentiel

Sarah Dégallier Rochat

Références
H. Bovet, "Analyse", Polymaths, 2002
J-Ph Javet, "Introduction à la notion de dérivée", Polycopié du Gymnase de Morges
J-Ph Javet, "Dérivée d'une fonction et règles de calculs", Polycopié du Gymnase de Morges
Notes du cours donné par M. Gelsomino (2005-2008), Gymnase de Burier

1. La notion de dérivée

Exemple 1.1 Tracer le plus précisément possible les tangentes à la courbe aux points indiqués. Evaluer la pente de la tangente en ces points.



On peut schématiser la fonction précédente comme suit

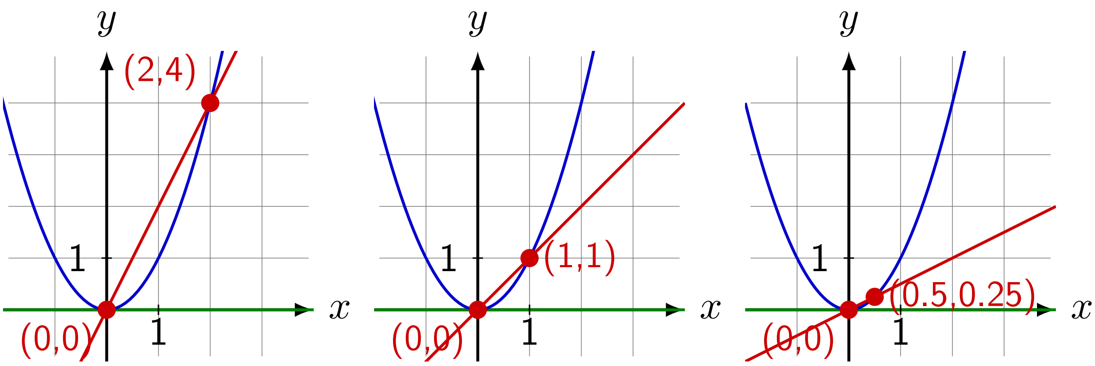
x	$-\infty$	-1.1	1.8	$+\infty$
m				
$f(x)$				

<u>Définition 1.1</u> La dérivée d'une fonction en un point correspond à la pente de la tangente à la fonction en ce point.
La dérivée nous sera utile pour

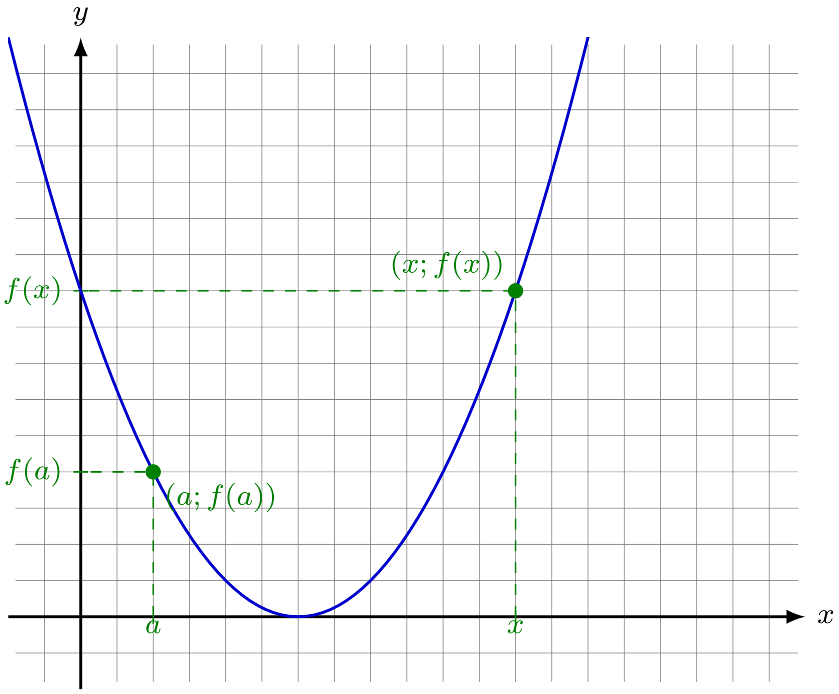
1. **Tangente** : Calculer l'équation de la tangente d'une courbe en un point
2. **Croissance de la droite** : Savoir si la courbe "monte" $(m > 0)$ ou "descend" $(m < 0)$
3. **Optimisation** : Trouver les minima et les maxima de la fonction $(m = 0)$

2. Calcul de la dérivée

<u>Exemple 2.1</u> Calculer les pentes des droites suivantes :



Exemple 2.2 Calculer la pente de la droite passant par les deux points donnés.



Définition 2.1 La dérivée d'une fonction $f(x)$ en un point a, notée $f'(a)$, est définie comme la limite suivante :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

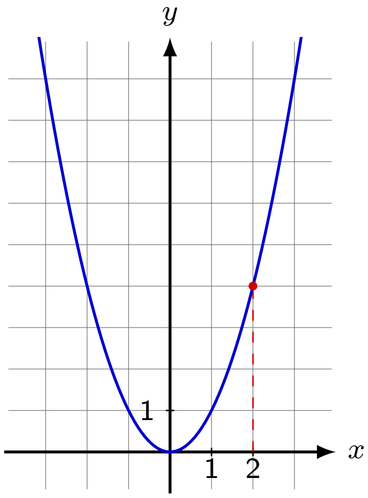
Par extension, on définit la dérivée d'une fonction comme sa dérivée en chaque point et on la note $f'(x)$.

Exemple 2.3 Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $x^2 : f'(a) \quad =$

2. $x^3 : f'(a) \quad =$

Exercice 2.1 Calculer l'équation de la tangente à la courbe $f(x) = x^2$ au point d'abscisse $x = 2$.



3. Règles de calcul

On a vu que

1. $(x^2)' = 2x$
2. $(x^3)' = 3x^2$

On peut généraliser cette règle à n'importe quelle puissance.

Règle 3.1 $\boxed{(kx^n)' = nkx^{n-1}}$ avec $k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Q}$.

Rappel 3.1 On a que $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ et $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

Exemple 3.1 Déterminer les dérivées des fonctions suivantes

1. $(5x^8)'$
2. $\left(\dfrac{6}{x^3}\right)'$
3. $(2\sqrt[3]{x})'$

Exercice 3.1 Calculer les dérivées suivantes

$f(x)$	$f'(x)$	Détail du calcul
3		
$k \in \mathbb{R}$		
x		
$3x$		
x^2		
x^3		
$\frac{1}{x}$		
$\sqrt{x}$		
$\sqrt[3]{x}$		

4. Propriétés de la dérivée

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions dérivables.

Propriété 4.1 $\boxed{(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)}$

Exemple 4.1 Calculer $[4x^9 - 5x^4]'$

Propriété 4.2 $\boxed{[(f(x))^n]' = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)}$

Exemple 4.2 Calculer $[(3x^7 + 2)^3]'$

Propriété 4.3 $\boxed{[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$

Exemple 4.3 Calculer $[(x^2+1) \cdot (2x+3)]'$

Propriété 4.4 $\boxed{\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}}$

Exemple 4.4 Calculer $\left[\dfrac{2x-3}{x-5}\right]'$

Définition 4.1 On appelle la dérivée de la dérivée d'une fonction sa dérivée seconde et on la note $f''(x)$.

Exemple 4.5 Calculer la dérivée seconde de la fonction $f(x) = 15x^7 - 3x^6 + 10x^4 - 3x^2 + 5x + 2$

5. Tangente à une courbe en un point donné

Exemple 5.1 Soit $f(x) = x^2 - \sqrt{x} - 10$ au point d'abscisse $x = 1$.

Esquisser la tangente trouvée sur le graphique ci-dessous.