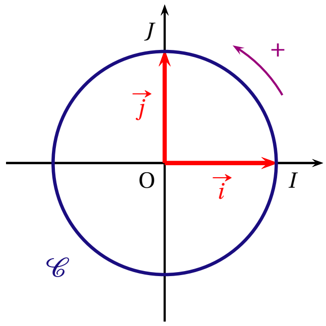
I REPÉRAGE SUR UN CERCLE

1 CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
Le cercle trigonométrique est le cercle $\mathscr{C}$ de centre O, de rayon 1 orienté dans le sens direct.

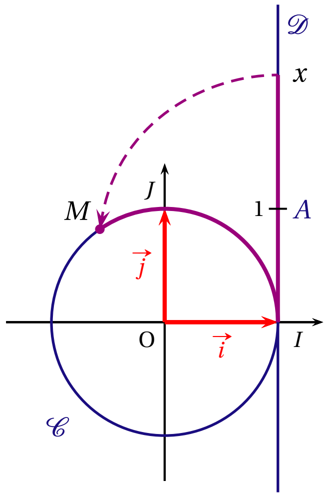


2 ENROULEMENT DE LA DROITE RÉELLE SUR LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
La droite $\mathscr{D}$ est tangente en I au cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
A est le point de coordonnées $(1;1)$. La droite $\mathscr{D}$ est munie du repère $(I;A)$.
Par enroulement de la droite réelle $\mathscr{D}$ sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$:

— à tout point de la droite d'abscisse x on peut associer un unique point M du cercle trigonométrique, image du réel x;

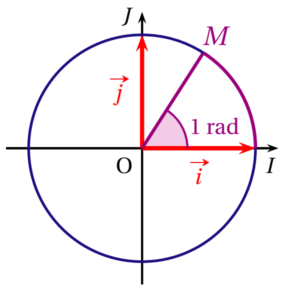
— tout point M du cercle trigonométrique est l'image d'une infinité de réels. Si le point M est associé à un réel x, alors il est associé à tout réel de la forme $x + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.



3 MESURE D'UN ANGLE EN RADIAN

DÉFINITION

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O, de rayon 1.
Un radian est la mesure d'un angle au centre qui intercepte le cercle $\mathscr{C}$ suivant un arc de longueur 1.

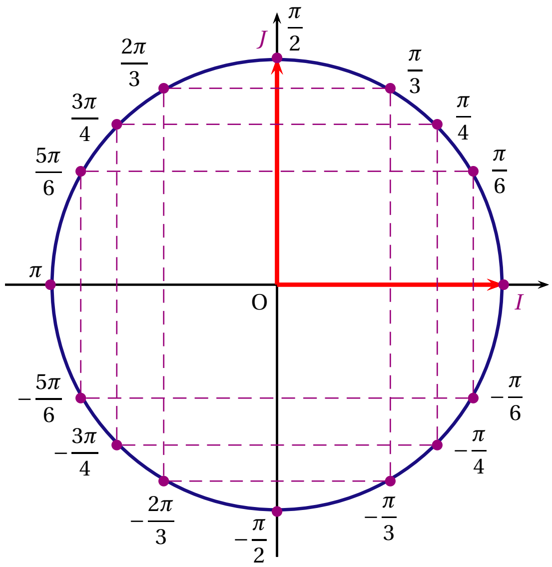


REMARQUE :

Les mesures en radians et en degrés d'un angle géométrique sont proportionnelles :

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°
x en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π

VALEURS REMARQUABLES



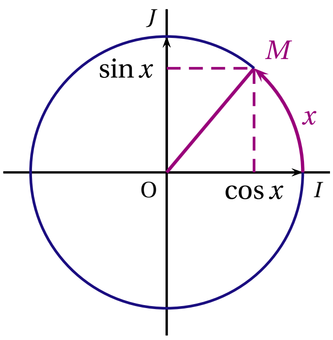
II COSINUS ET SINUS D'UN NOMBRE RÉEL

1 DÉFINITION

Soit M le point du cercle trigonométrique associé à un réel x.

— Le cosinus du réel x, noté $\cos x$, est l'abscisse du point M.

— Le sinus du réel x, noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M.



2 PROPRIÉTÉS

— Pour tout réel x et pour tout entier relatif k, $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin x$

— Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

— Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

EXEMPLE :

Sachant que $\sin x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ avec $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$, déterminer la valeur exacte de $\cos x$.

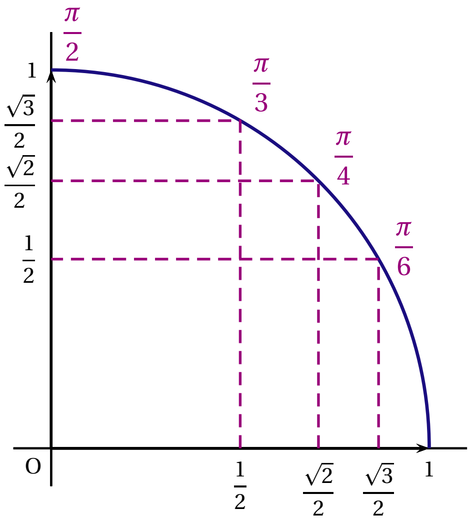
Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\cos^2 x + \dfrac{5}{9} = 1$, soit $\cos^2 x = \dfrac{4}{9}$.
Il existe deux valeurs possibles du cosinus :

$$\cos x = -\frac{2}{3} \qquad \text{ou} \qquad \cos x = \frac{2}{3}$$

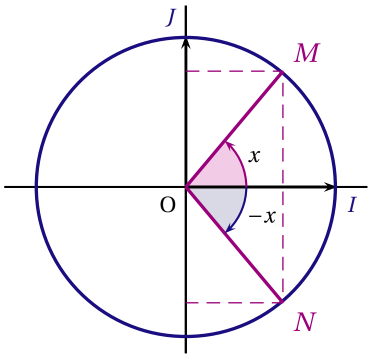
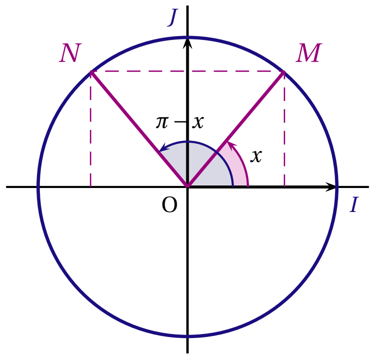
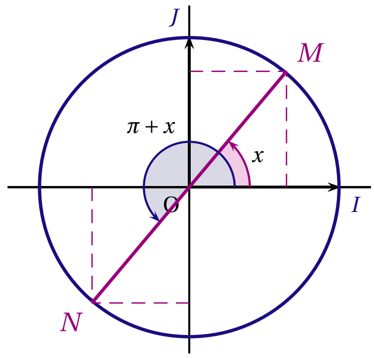
Comme $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$, alors $\cos x > 0$ donc $\cos x = \dfrac{2}{3}$.

3 VALEURS REMARQUABLES

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



4 ANGLES ASSOCIÉS

Pour tout réel x :	Pour tout réel x :	Pour tout réel x :
$\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$
		
M et N sont symétriques par rapport à (OI)	M et N sont symétriques par rapport à (OJ)	M et N sont symétriques par rapport à O

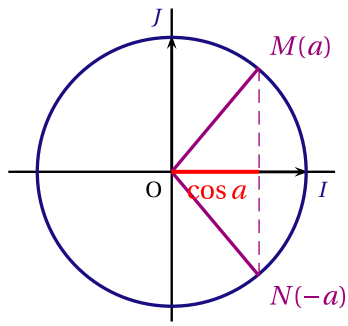
EXEMPLES :

1. $\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
2. $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5 ÉQUATIONS

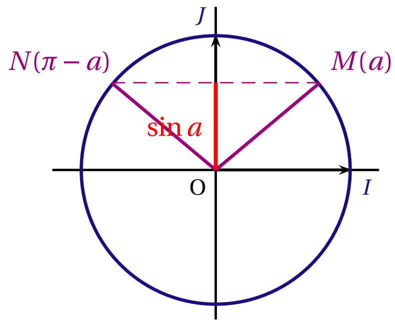
— Équation $\cos x = \cos a$

Soit a un réel donné. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \cos a$ sont : $\begin{cases} x & = a + k \times 2\pi \\ x & = -a + k \times 2\pi \end{cases}$ où k est un entier relatif.



— Équation $\sin x = \sin a$

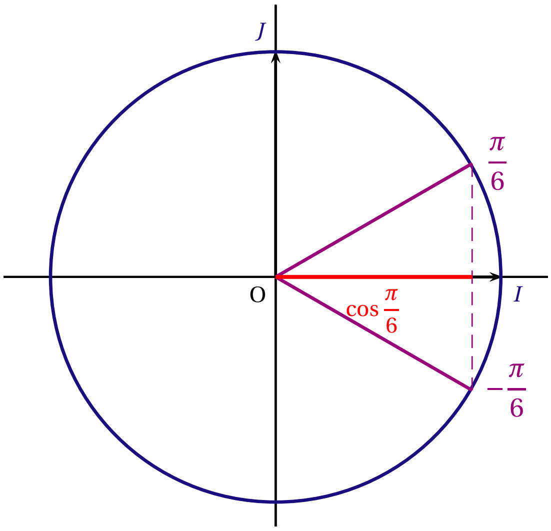
Soit a un réel donné. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = \sin a$ sont : $\begin{cases} x &= a + k \times 2\pi \\ x &= \pi - a + k \times 2\pi \end{cases}$ où k est un entier relatif.



EXEMPLES :

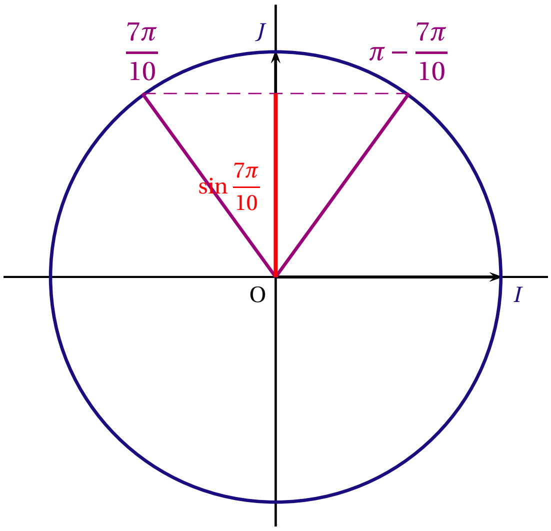
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   Comme $\cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ l'équation est équivalente à l'équation $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{6}$



   Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont $x = \dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi$ avec k entier relatif.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = \sin \dfrac{7\pi}{10}$.



   Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = \sin \dfrac{7\pi}{10}$ sont $x = \dfrac{7\pi}{10} + k \times 2\pi$ ou $x = \dfrac{3\pi}{10} + k \times 2\pi$ avec k entier relatif.

EXERCICE 1

1. Convertir en radians les mesures d'angle géométriques donnés en degrés :

   a) 210° b) 5° c) 198° d) 315° e) 72° f) 40°

2. Convertir en degrés les mesures des angles géométriques donnés en radians :

   a) $\dfrac{\pi}{9}$ b) $\dfrac{5\pi}{6}$ c) $\dfrac{7\pi}{12}$ d) $\dfrac{9\pi}{5}$ e) $\dfrac{14\pi}{9}$ f) $\dfrac{72\pi}{45}$

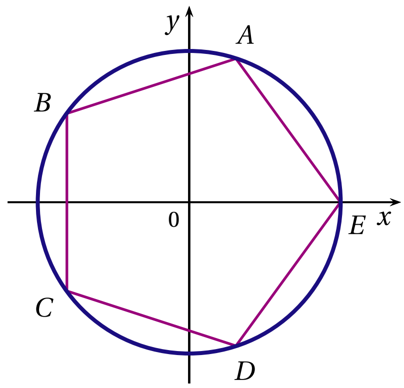
EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer le réel $x \in]-\pi;\pi]$ dont l'image par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique coïncide avec le point image du réel donné.

a) $\dfrac{41\pi}{6}$ b) $-\dfrac{15\pi}{2}$ c) 13π d) $-\dfrac{10\pi}{3}$ e) -35π f) $\dfrac{52\pi}{9}$

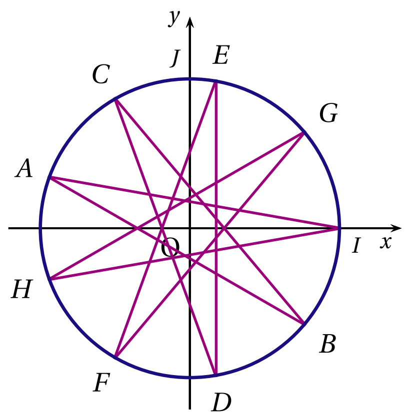
EXERCICE 3

Le pentagone $ABCDE$ est inscrit dans le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.



À quels réels de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ sont associés les sommets de ce pentagone ?

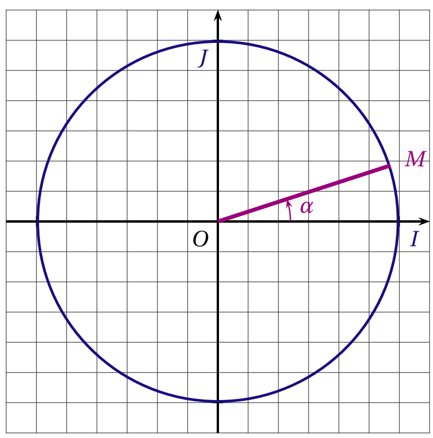
EXERCICE 4



Sur le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé $(\text{O}; I, J)$, on a tracé le polygone régulier étoilé $ABCDEFGHI$.

1. À quels réels de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ sont associés les sommets de ce polygone ?
2. Donner les coordonnées des points C et F.
3. Les points A et H ont-ils la même abscisse ?

EXERCICE 5



1. a) Placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C et D repérés respectivement par les réels $\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.

   b) Donner les coordonnées des quatre points A, B, C et D.

2. M est un point du cercle trigonométrique tel que la mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM} = \alpha$ avec $\alpha \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

   Placer sur le cercle trigonométrique les points M_1 et M_2 tels que $\widehat{IOM_1} = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$ et $\widehat{IOM_2} = \pi - \alpha$.

3. a) On donne $\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Donner la valeur exacte de $\sin\left(-\dfrac{9\pi}{10}\right)$.

   b) Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

EXERCICE 6

Connaissant la valeur de $\cos x$ ou de $\sin x$ sur l'intervalle donné, déterminer la valeur du sinus ou du cosinus du réel x correspondant :

$\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$; $\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x\in[0;\pi]$; $\sin x=\dfrac{1}{2}$ et $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$ et $x\in[-\pi;0]$; $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};0\right]$; $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

EXERCICE 7

Simplifier chacune des expressions suivantes :

1. a) $A=\cos(\pi-x)+2\cos x-3\cos(\pi+x)$

   b) $B=\sin(2\pi-x)-2\sin(\pi+x)+3\sin(x-\pi)$

   c) $C=\cos(-x)-2\cos(3\pi-x)+2\cos(x+\pi)$

2. a) $D=(1+\cos t+\sin t)^2-2(1+\cos t)(1+\sin t)$

   b) $E=\cos^4 t-\sin^4 t+2\sin^2 t$

EXERCICE 8

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

$\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $1+2\cos x=0$; $1-2\sin x=0$.

EXERCICE 9

Résoudre les équations suivantes :

$\cos x=\cos\dfrac{2\pi}{3}$; $\sin x=\sin\dfrac{3\pi}{4}$; $\sin x=\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$; $\cos x=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

EXERCICE 10

On donne $\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1. Déterminer la valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{5}$.
2. En déduire les valeurs exactes du sinus et du cosinus de $-\dfrac{\pi}{5}$; $\dfrac{4\pi}{5}$ et $-\dfrac{4\pi}{5}$.

EXERCICE 11

1. Calculer $\cos x$ sachant que $\sin x=\dfrac{3}{5}$ et $x\in\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.
2. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation $2\cos^2 x-1=0$.

EXERCICE 12

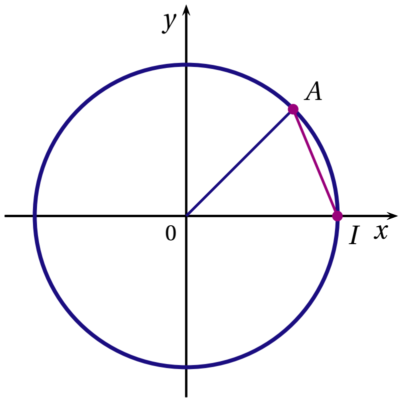
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2-X-\dfrac{3}{4}=0$.
2. En déduire les solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ de l'équation $\sin^2 x-\sin x-\dfrac{3}{4}=0$.

EXERCICE 13

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2-3x-2=0$.
2. En déduire les solutions de l'équation : $2\cos^2 x-3\cos x-2=0$.

EXERCICE 14

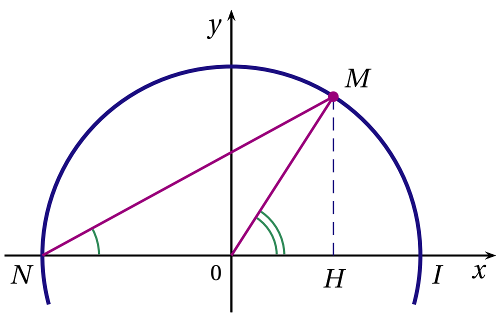
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique, A le point du cercle trigonométrique image du réel $\frac{\pi}{4}$ et I le point de coordonnées $(1;0)$.



1. a) Donner les coordonnées du point A.
   b) Calculer distance IA.
   c) Montrer que $IA=2\times\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$. (*On pourra utiliser le point M milieu du segment* $[IA]$.)
   d) En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
   e) Déterminer alors $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.
2. a) En reproduisant la méthode précédente pour calculer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, calculer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
   b) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 15

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, M est un point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ et I le point de coordonnées $(1;0)$.

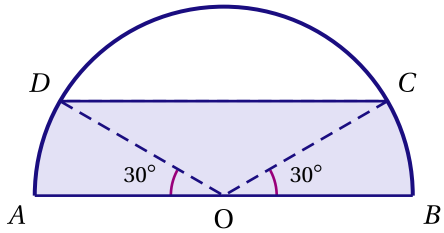


1. Montrer que $\widehat{IOM}=2\widehat{INM}$
2. Soit x le réel dont M est l'image par enroulement de la droite réelle sur le cercle $\mathscr{C}$.
   a) Montrer que $MN^2=2\cos x+2$.
   b) En considérant le triangle rectangle MHN, montrer que $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1+\cos x}{2}$.

3. Application :
   a) Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ puis en déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
   b) Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ puis en déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 16

Dans la figure ci-dessous, on considère le demi-cercle de rayon 5 cm.



Comparer l'aire située sous la corde DC et l'aire de la partie du demi-cercle située au dessus de la corde DC.

EXERCICE 17

Pour tout entier n non nul on considère le réel $a_n = n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

1. Calculer $a_1 = \sin(\pi)\cos(\pi)$, $a_2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $a_3 = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $a_4 = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $a_6 = 6\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée des réels suivants :
   $a_{100} = 100\sin\left(\frac{\pi}{100}\right)\cos\left(\frac{\pi}{100}\right)$, $a_{500} = 500\sin\left(\frac{\pi}{500}\right)\cos\left(\frac{\pi}{500}\right)$ et $a_{1000} = 1000\sin\left(\frac{\pi}{1000}\right)\cos\left(\frac{\pi}{1000}\right)$.
3. a) Emettre une conjecture sur la valeur de a_n quand n devient de plus en plus grand.
   b) On considère l'algorithme ci-dessous :

```
N ← 1
A ← sin(π) × cos(π)
Tant que π − A ⩾ 10^(−4)
    N ← N + 1
    A ← N × sin(π/N) × cos(π/N)
Fin Tant que
```

   Donner une interprétation de la valeur de la variable N calculée par cet algorithme.