

I ENSEMBLES DE NOMBRES

1 NOMBRES ENTIERS NATURELS

DÉFINITION

L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$. C'est l'ensemble des nombres positifs qui permettent de compter une collection d'objets.
On note \mathbb{N}^* ou $\mathbb{N} - \{0\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

EXEMPLES

$$245 \in \mathbb{N}; \quad -5 \notin \mathbb{N}; \quad 2^5 \in \mathbb{N}; \quad \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}; \quad 0 \in \mathbb{N}; \quad 0 \notin \mathbb{N}^*$$

La notation « $x \in E$ » signifie que l'élément x appartient à l'ensemble E .

La notation « $x \notin E$ » signifie que l'élément x n'appartient pas à l'ensemble E .

NOTIONS D'ARITHMÉTIQUE

Soient a et b deux nombres entiers naturels.

- on dit que b *divise* a lorsqu'il existe un entier naturel q tel que $a = b \times q$. (on dit encore que b est un *diviseur* de a ou que a est un *multiple* de b)
- Un entier naturel $p \geq 2$ est un *nombre premier* lorsque ses seuls diviseurs sont 1 et p .

2 NOMBRES ENTIERS RELATIFS

L'ensemble des nombres entiers relatifs est $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$. Il est composé des nombres entiers naturels et de leurs opposés.
En particulier, l'ensemble \mathbb{N} est *contenu* (ou *inclus*) dans \mathbb{Z} , ce que l'on note « $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ».

La proposition « Si $n \in \mathbb{N}$ alors $n \in \mathbb{Z}$ et $-n \in \mathbb{Z}$ » est vraie.

Par contre, la réciproque « Si $n \in \mathbb{Z}$ et $-n \in \mathbb{Z}$ alors $n \in \mathbb{N}$ » est fausse. (Il suffit de choisir $n = -1$)

3 NOMBRES DÉCIMAUX

Les nombres décimaux sont les nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$, où a est un entier et n un entier naturel.
Ce sont les nombres dont l'écriture décimale n'a qu'un nombre *fini* de chiffres après la virgule.
L'ensemble des *nombres décimaux* est noté \mathbb{D} .

EXEMPLES

$$-13 \in \mathbb{D}; \quad 0,3333 \in \mathbb{D}; \quad \frac{1}{3} \notin \mathbb{D}; \quad \frac{3}{4} \in \mathbb{D}; \quad 3,1416 \in \mathbb{D}; \quad \pi \notin \mathbb{D}.$$

4 NOMBRES RATIONNELS

L'ensemble des nombres rationnels est $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$.
C'est l'ensemble des nombres qui s'écrivent comme le quotient d'un entier par un entier non nul.

- La fraction $\frac{a}{b}$ avec $b \neq 0$ est dite *irréductible* lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de facteurs communs (autres que 1 ou -1).
- La partie décimale d'un nombre rationnel est infinie et périodique à partir d'un certain rang.

— La division par 0 est **interdite** : l'écriture $\frac{a}{0}$ n'a aucun sens.

EXEMPLES

$$-13 \in \mathbb{Q}; \quad 0,5 \in \mathbb{Q}; \quad -\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}; \quad \frac{22}{7} \in \mathbb{Q}; \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}; \quad \pi \notin \mathbb{Q}.$$

5 NOMBRES RÉELS

Dès l'antiquité, on avait découvert l'insuffisance des nombres rationnels.

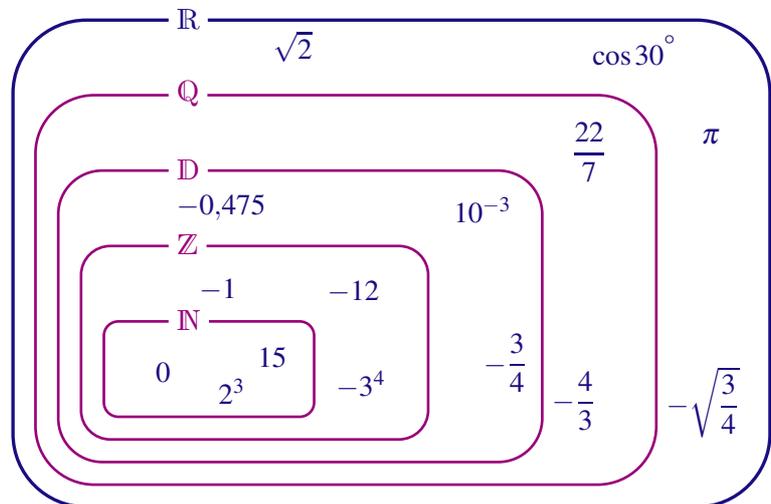
Par exemple, il n'existe pas de rationnel x tel que $x^2 = 2$ on dit que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

L'ensemble de tous les nombres rationnels et irrationnels est l'ensemble des nombres réels noté \mathbb{R}

Chaque nombre réel correspond à un unique point de la droite graduée. Réciproquement, à chaque point de la droite graduée correspond un unique réel, appelé *abscisse* de ce point.

INCLUSIONS

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



II DÉVELOPPER, FACTORISER

1 DÉFINITION

- Développer un produit, c'est écrire ce produit sous la forme d'une somme.
- Factoriser une somme, c'est écrire cette somme sous la forme d'un produit.

2 PROPRIÉTÉS

DISTRIBUTIVITÉ DE LA MULTIPLICATION SUR L'ADDITION

Pour tous nombres réels a , b et k on a :

$$k(a + b) = ka + kb$$

Développer
↓
↑
Factoriser

DOUBLE DISTRIBUTIVITÉ

Pour tous nombres réels a, b, c et d on a :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

EXEMPLES

1. Développer, réduire et ordonner

$$\begin{aligned} (2x + 3)(5 - 4x) &= 10x - 8x^2 + 15 - 12x \\ &= -8x^2 - 2x + 15 \end{aligned}$$

2. Factoriser

$$6x^2 - 8x = 2x(3x - 4)$$

IDENTITÉS REMARQUABLES

Pour tous nombres réels a et b on a :

$$\begin{array}{c} \text{Développer} \\ \curvearrowright \\ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \\ \curvearrowleft \\ \text{Factoriser} \end{array}$$

EXEMPLES

1. Développer

$$\begin{aligned} \left(2x + \frac{3}{2}\right)^2 &= (2x)^2 + 2 \times (2x) \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= 4x^2 + 6x + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3x - 2)^2 &= (3x)^2 - 2 \times (3x) \times 2 + 2^2 \\ &= 9x^2 - 12x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5x + 4)(5x - 4) &= (5x)^2 - 4^2 \\ &= 25x^2 - 16 \end{aligned}$$

2. Factoriser

$$\begin{aligned} 4x^2 + 12x + 9 &= (2x)^2 + 2 \times (2x) \times 3 + 3^2 \\ &= (2x + 3)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x^2 - 2x + \frac{1}{4} &= (2x)^2 - 2 \times (2x) \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16x^2 - 121 &= (4x)^2 - 11^2 \\ &= (4x + 11)(4x - 11) \end{aligned}$$

III INTERVALLES ET INÉQUATIONS

1 INTERVALLES

Soient $a < b$ deux nombres réels :

L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est l'intervalle $[a; b]$

L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est l'intervalle $]a; b[$

L'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b$ est l'intervalle $[a; b[$

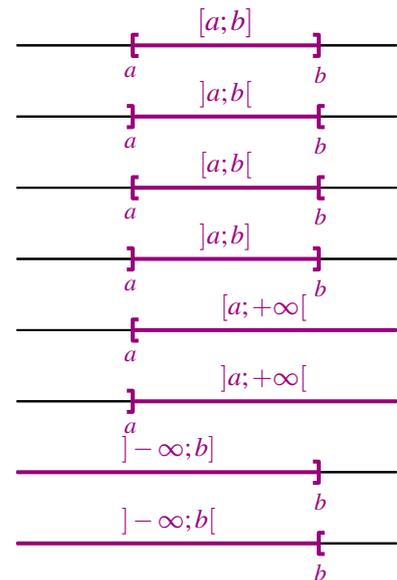
L'ensemble des réels x tels que $a < x \leq b$ est l'intervalle $]a; b]$

L'ensemble des réels x tels que $a \leq x$ est l'intervalle $[a; +\infty[$

L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est l'intervalle $]a; +\infty[$

L'ensemble des réels x tels que $x \leq b$ est l'intervalle $] - \infty; b]$

L'ensemble des réels x tels que $x < b$ est l'intervalle $] - \infty; b[$



EXEMPLES

Écrire sous forme d'intervalle les ensembles de nombres réels suivants :

1. $x \leq \frac{3}{4}$.

L'ensemble cherché est constitué de tous les nombres réels x inférieurs ou égaux à $\frac{3}{4}$. Il s'agit de l'intervalle $] - \infty; \frac{3}{4}]$.

2. $-3 < x \leq \sqrt{2}$.

L'ensemble cherché est constitué de tous les nombres réels x strictement supérieurs à -3 et inférieurs ou égaux à $\sqrt{2}$. Il s'agit de l'intervalle $] - 3; \sqrt{2}]$.

2 INTERSECTION ET RÉUNION D'INTERVALLES

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} .

— **L'intersection** des intervalles I et J , notée $I \cap J$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'intervalle I et à l'intervalle J :

$$\text{Si } x \in I \text{ et } x \in J, \text{ alors } x \in I \cap J \quad (\cap \text{ se lit } \textit{inter})$$

— **La réunion** des intervalles I et J , notée $I \cup J$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'intervalle I ou à l'intervalle J :

$$\text{Si } x \in I \text{ ou } x \in J, \text{ alors } x \in I \cup J \quad (\cup \text{ se lit } \textit{union})$$

EXEMPLES

1. Soient les intervalles $I =] - \infty; 3]$ et $J =] - 3; 5]$.

a) L'intersection des deux intervalles $I \cap J$ est l'ensemble des réels x tels que : $x \leq 3$ et $-3 < x \leq 5$ soit $I \cap J =] - 3; 3]$.

b) La réunion des deux intervalles $I \cup J$ est l'ensemble des réels x tels que : $x \leq 3$ ou $-3 < x \leq 5$ soit $I \cup J =] - \infty; 5]$.

2. L'ensemble des réels non nuls \mathbb{R}^* est l'ensemble des réels $x \in] - \infty; 0[\cup] 0; +\infty[$.

EXERCICE 1

1. Quelle est la différence entre le carré de 7 et la somme des sept premiers nombres impairs ?
2. Les nombres 152, 224 et 376 sont-ils divisibles par 8 ?
La conjecture « Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par huit alors ce nombre est divisible par huit » est-elle vraie ou fausse ?
3. a et b sont deux nombres premiers tels que $a < b$ et $a + b$ est un nombre premier. Déterminer a .
4. Quel est le plus petit nombre de cubes que contient une boîte de dimensions 63 cm, 45 et 18 cm ?
5. La somme de trois entiers consécutifs est-elle divisible par 3 ?
6. Le produit de trois entiers consécutifs est-il divisible par 8 ?

EXERCICE 2

Avant d'effectuer sa tournée un représentant fait le plein d'essence. Au cours de ses déplacements, il rajoute dans son réservoir une première fois 24,7 litres d'essence et une deuxième fois 18,9 litres.
À son retour, il constate qu'il manque 11,5 litres pour refaire le plein du réservoir d'une capacité de 60 litres. Sachant que la consommation moyenne du véhicule est de 5,8 litres pour 100 kilomètres, quelle est la distance parcourue par ce représentant au cours de sa tournée ?

EXERCICE 3

1. Donner trois nombres rationnels compris entre $\frac{6}{11}$ et $\frac{7}{11}$
2. Quel nombre faut-il ajouter au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{6}{7}$ pour obtenir l'inverse de $\frac{6}{7}$?

EXERCICE 4

Soit $E = 2x^3 - x^2 - 5x - 1$.

Calculer E pour $x = -1$ ou $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 2$. Peut-on conclure que pour tout réel x , $E = 1$?

EXERCICE 5

Les nombres de Mersenne sont les nombres entiers de la forme $M_n = 2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul.

1. Calculer les nombres de Mersenne M_3 et M_4 .
2. La propriété « si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est premier » a été démontrée.
À l'aide d'un contre exemple, montrer que la réciproque de cette propriété est fausse.

EXERCICE 6

PARTIE A

On donne $a = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\pi}{3}}$ et $b = 1 - \frac{1}{2 + \frac{\pi}{3}}$.

1. À l'aide de la calculatrice :
 - a) donner les troncatures d'ordre 3 des réels a et b ;
 - b) donner les arrondis à 10^{-3} de a et de b , en déduire le produit des deux valeurs approchées.
2. Calculer la valeur exacte du produit des réels a et b . Commenter.

PARTIE B

On donne $A = 1 + \frac{1}{1 + \frac{x}{3}}$ et $B = 1 - \frac{1}{2 + \frac{x}{3}}$ où x est un réel strictement positif.

Le réel A est-il l'inverse du réel B ?

EXERCICE 7

Les égalités suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. $(x-2)^2(x^2+2x+2) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6$
2. $(x+2)(x^2-2x-1) = x^3 - 4x - 2$
3. $(x-3)(x^2+2x+1) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

EXERCICE 8

Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A = 15x - (2x+3)^2; \quad B = (x+2)(x-2) - (x+1)^2; \quad C = (2-a)^2 - (2+a)^2$$

EXERCICE 9

Factoriser les expressions suivantes :

$$A = 49x^2 - 14x + 1; \quad B = (x+3)^2 - 16; \quad C = x^2 - 25 - (x+5)(1-2x)$$

EXERCICE 10

Montrer que, si $a^2 - b^2$ est premier, alors les entiers a et b sont consécutifs.

EXERCICE 11

1. $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{a-b}{2}$, exprimer $x^2 - y^2$ en fonction de a et b .
2. $x + y = a$ et $xy = b$. Exprimer $(x-y)^2$ en fonction de a et b .

EXERCICE 12

Compléter par l'un des symboles : \in, \notin .

$$\pi \dots \left[\frac{333}{106}; \frac{22}{7} \right]; \quad -\frac{2}{3} \dots \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]; \quad 0,2 \dots \left] \frac{1}{5}; +\infty \left[; \quad \sqrt{2} \dots \left[\frac{7}{5}; 1,414 \left[$$

EXERCICE 13

1. Dans chacun des cas suivants, écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres réels vérifiant la condition donnée.

$$\text{a) } x \geq -\frac{3}{7}; \quad \text{b) } -\frac{2}{3} < x; \quad \text{c) } \sqrt{2} < x \leq 3; \quad \text{d) } -\frac{3}{4} \geq x > -2$$

2. Traduire chacune des informations ci-dessous par une ou des inégalités.

$$\text{a) } x \in \left] -\infty; -\frac{5}{6} \right]; \quad \text{b) } x \in]-2; +\infty[; \quad \text{c) } x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right[; \quad \text{d) } x \in \left] -10^{-1}; \frac{1}{10^{-2}} \right]$$

EXERCICE 14

1. Déterminer l'ensemble S_1 des solutions de l'inéquation $2x - 3 > 0$
2. Déterminer l'ensemble S_2 des solutions de l'inéquation $1 - 2x \geq 0$.
3. Déterminer l'ensemble S_3 des solutions de l'inéquation $2x + 3 \leq 5x + 1$.