

**Exercice 1****la légende de l'échiquier de Sissa**

Le roi Belkib (Indes) promet une récompense fabuleuse à qui lui proposerait une distraction qui le satisferait. Lorsque le sage Sissa, fils du Brahmine Dahir, lui présenta le jeu d'échecs, le souverain demanda à Sissa ce que celui-ci souhaitait en échange de ce cadeau extraordinaire.

Sissa demanda au prince de déposer un grain de blé sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, et ainsi de suite pour remplir l'échiquier en doublant la quantité de grains à chaque case. Le prince accorda immédiatement cette récompense sans se douter de ce qui allait suivre. Son conseiller lui expliqua qu'il venait de précipiter le royaume dans la ruine car les récoltes de l'année ne suffiraient pas à payer Sissa.

- Déterminer une fonction  $f(n)$  représentant le nombre de grains de riz sur la  $n^e$  case.
- Calculer le nombre de grains de riz sur la dernière case de l'échiquier.
- Déterminer la première case qui devra accueillir plus d'un million de grains de riz.

**Exercice 2**

50 lapins sont amenés sur une petite île inhabitée. Ils n'ont pas de prédateurs, et bien assez de nourriture pour vivre et se reproduire. Le nombre de lapins sur l'île augmente ainsi de 60% par année.

- Déterminer une fonction  $N(t)$  modélisant le nombre de lapins sur l'île après  $t$  années.
- Déterminer le nombre de lapins qu'il y aura sur l'île après 8 ans.
- Déterminer dans le courant de quelle année le nombre de lapins dépassera 20'000.

**Exercice 3**

La surface d'une forêt diminue de 2% tous les 5 ans.

Au début de l'année 1970, elle recouvrait 6,7 millions de  $\text{km}^2$ .

- Déterminer une fonction exponentielle  $S(t)$  modélisant ce phénomène.
- Combien de millions de  $\text{km}^2$  recouvrait-elle au début de l'année 2013 ?
- Au début de quelle année la surface de cette forêt sera-t-elle pour la première fois inférieure à 4,69 millions de  $\text{km}^2$  ?

**Exercice 4**

On a observé que la population des chats d'une ville croît selon une fonction exponentielle.

Il y a 11 ans, on a avait dénombré 3260 chats. Aujourd'hui, la ville en compte 2119 de plus.

- Combien y aura-t-il de chats dans cette ville dans 7 ans ?
- Dans combien d'années complètes y aura-t-il pour la première fois plus de 10'001 chats dans cette ville ?

### Exercice 5

Dans un pays surpeuplé, la loi interdit aux couples d'avoir plus d'un enfant. On suppose que le nombre d'hommes et de femmes est identique, que chaque personne entre 20 et 40 ans est en couple et que ce couple fait un et un seul enfant. Actuellement, le nombre d'habitants de moins de 20 ans est de 200 millions.

- Déterminer une fonction  $N(t)$  modélisant le nombre d'habitants de moins de 20 ans présents dans la population dans  $t$  années.
- Calculer le nombre d'habitants de moins de 20 ans qu'il y aura dans 50 ans.
- Dans combien d'années le nombre d'habitants de moins de 20 ans passera-t-il pour la première fois au dessous de 10 millions ?

### Exercice 6

Un médecin administre 75 mg d'un médicament à un patient. On sait que chaque heure, 30% du médicament est rejeté par le corps.

- Déterminer une fonction  $Q(t)$  modélisant la quantité de médicament présente dans le corps du patient  $t$  heures après avoir pris le traitement.
- Calculer la quantité de médicament restante après 4 heures.
- Déterminer le temps nécessaire pour éliminer 99% du médicament

### Exercice 7

Le sucre se dissout dans l'eau à un taux proportionnel à la quantité non encore dissoute. Si, initialement, 50 kg de sucre étaient présents et qu'après 5 heures, il n'en restait que 20 kg, combien de temps faudrait-il encore pour que le 90% de la quantité initiale soit dissoute ?

### Exercice 8

La population d'un pays A double tous les 18 ans. Actuellement, ce pays compte 2 millions d'habitants. Un autre pays B compte 6 millions d'habitants, et sa population double tous les 27 ans. Dans combien d'années la population du pays A aura-t-elle rattrapé celle du pays B ?

### Réponses

- $f(n) = 2^{n-1}$
  - $\sim 9 \cdot 10^{18} = 9$  milliards de milliards
  - la 21<sup>e</sup> case
- $N(t) = 50 \cdot 1.6^t$
  - 2147 lapins
  - au cours de la 13<sup>e</sup> année
- $S(t) = 6,7 \cdot (0,98)^{t/5}$
  - $\sim 5,63$  millions de km<sup>2</sup>
  - au début de l'an 2059
- $\sim 7398$
- 25 années
- $N(t) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$
  - 35,4 millions
  - dans 87 ans
- $Q(t) = 75 \cdot 0.7^t$
  - environ 18 mg
  - environ 12.9 heures, soit 12h 54min
- environ 7h 34 min de plus
- dans environ 85.59 ans