GYMNASE DE BURIER

Chapitre 2 - Exponentielles et Logarithmes

Sarah Dégallier Rochat

1. Les équations exponentielles

Exemple 1.1 Une action en bourse vaut 100.-. Sa valeur double chaque année.

1. Quelle sera sa valeur dans 4 ans ?
2. Quelle sera sa valeur dans n ans ?

Définition 1.1 Une équation exponentielle est une équation dans laquelle **la variable apparaît en exposant**.

Exemple 1.2

1. $3^{x-1} = 9$
2. $5^{x^2-1} = 125$
3. $5^{x+1} + 5^{-x} = 6$

Propriété 1.1 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$ et $x, y \in \mathbb{Q}$.

$$\boxed{a^x = a^y \Leftrightarrow x = y}$$

Exemple 1.3 Résoudre l'équation $3^{x-1} = 9$.

Exercice 1.1 Résoudre les équations suivantes.

1. $25^{x-1} = 125$

2. $2^{3x+2} = \frac{1}{16}$

Le nombre d'Euler

Le nombre d'Euler[1] $e = 2.718281...$ est un nombre qui est souvent utilisé comme base dans les équations exponentielles. Nous verrons plus tard les raisons de ce choix.

La fonction exponentielle de base e peut être calculée grâce à la touche $\boxed{e^x}$ sur les calculatrices.

Exemple 1.4 Résoudre l'équation $e^{x^2-x-6} = 1$.

1. Mathématicien suisse, 1707-1783.

2. Logarithmes

Exercice 2.1 Résoudre l'équation $10^x = 7$ en donnant une réponse avec 2 chiffres après la virgule.

Relation 2.1 Soit $a, u \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, alors

$$a^x = u \Leftrightarrow \log_a(u) = x$$

Par convention,

1. $\log_{10}(x)$ s'écrit $\log(x)$ (LOG sur la calculatrice)
2. $\log_e(x)$ s'écrit $\ln(x)$ (LN sur la calculatrice)

Exemple 2.1 Résoudre l'équation suivante $10^x = 0.01$

Exercice 2.2 Résoudre les équations suivantes.

1. $e^x = 10$

2. $e^{2x} = 15$

Propriétés des logarithmes

Exemple 2.2 Résoudre l'équation $\log_2(1) = x$.

Propriété 2.1 $\boxed{\log_a(1) \qquad}$

Exercice 2.3 Résoudre l'équation $\log_5(5) = x$.

Propriété 2.2 $\boxed{\log_a(a) \qquad}$

Exemple 2.3 Résoudre l'équation $\log_2(2^3) = x$.

Propriété 2.3 $\boxed{\log_a(a^u) \qquad}$

Exercice 2.4 Résoudre l'équation $4^{\log_4(64)} = x$.

Propriété 2.4 $\boxed{a^{\log_a(u)} \qquad}$

Exemple 2.4 Résoudre l'équation $\log_2(4) + \log_2(8) = \log_2(x)$.

Propriété 2.5 $\boxed{\log_a(u) + \log_a(v) \qquad\qquad\qquad}$

Propriété 2.6 $\boxed{\log_a(u) - \log_a(v) = \log_a\left(\frac{u}{v}\right)}$

Exercice 2.5 Montrer que $\log_a\left(\frac{1}{v}\right) = -\log_a(v)$.

Propriété 2.7 (Récapitulatif) Soit $u, v \in \mathbb{R}_+^*$, alors

1. $\log_a(1) = 0$
2. $\log_a(a) = 1$
3. $\log_a(a^u) = u$
4. $a^{\log_a(u)} = u$
5. $\log_a(u) + \log_a(v) = \log_a(u \cdot v)$
6. $\log_a(u) - \log_a(v) = \log_a\left(\frac{u}{v}\right)$
7. $\log_a\left(\frac{1}{v}\right) = -\log_a(v)$
8. $\log_a(u^n) = n\log_a(u) \quad (n \in \mathbb{R})$

Exercice 2.6 Effectuez les calculs suivants en utilisant les propriétés des logarithmes (sans calculatrice).

1. $\log_5(25)$
2. $\log_4\left(\frac{1}{64}\right)$
3. $\log_4(2) + \log_4(8)$
4. $\log_7(21) - \log_7(3)$
5. $\log_{17}(1)$
6. $e^{\ln(53)}$

Exemple 2.5 Résoudre l'équation $\log(5 + x) = \log(4 - x) + 1$.

Exercice 2.7 Résoudre l'équation
$\log_2(3x-4)+\log_2(10x-4)=2\log_2(5x-2)$.

Formule de changement de base)

1. $\log_a(u)=\frac{\log_b(u)}{\log_b(a)}$
2. $a^x=b^{\log_b(a)\cdot x}$

En particulier, en base 10, on a

1. $\log_a(u)=\frac{\log(u)}{\log(a)}$
2. $a^x=10^{\log(a)\cdot x}$

Et en base e

1. $\log_a(u)=\frac{\ln(u)}{\ln(a)}$
2. $a^x=e^{\ln(a)\cdot x}$

Exemple 2.6 Effectuez les calculs suivants avec la machine en donnant les réponses avec trois chiffres après la virgule.

1. $\log_3(15)$
2. $\log_7(346)$

Exercice 2.8 Résoudre les équations suivantes avec la machine en donnant les réponses avec trois chiffres après la virgule.

1. $3^x = 24$

2. $5^{-3x} = 15'625$

3. Applications

Exemple 3.1 (intérêts composés) Si vous déposez 2'600.- dans une banque à un taux d'intérêt annuel de 3.6%, de combien d'argent disposerez-vous 15 ans plus tard ?

<u>Définition 3.1</u> On dit qu'une variable C augmente de façon exponentielle si elle augmente régulièrement d'un même **pourcentage** t sur un intervalle de temps fixé, autrement dit si

$$\boxed{C(n) = C_0(1+t)^n}$$

De même, on dit qu'une variable C diminue de façon exponentielle si elle diminue régulièrement d'un même **pourcentage** t sur un intervalle de temps fixé, autrement dit si

$$\boxed{C(n) = C_0(1-t)^n}$$

<u>Exercice 3.1</u> Une forêt renferme aujourd'hui 200'000 m^3 de bois. Combien en contenait-elle il y a 15 ans si l'accroissement annuel de la quantité de bois est de 3.25% ?