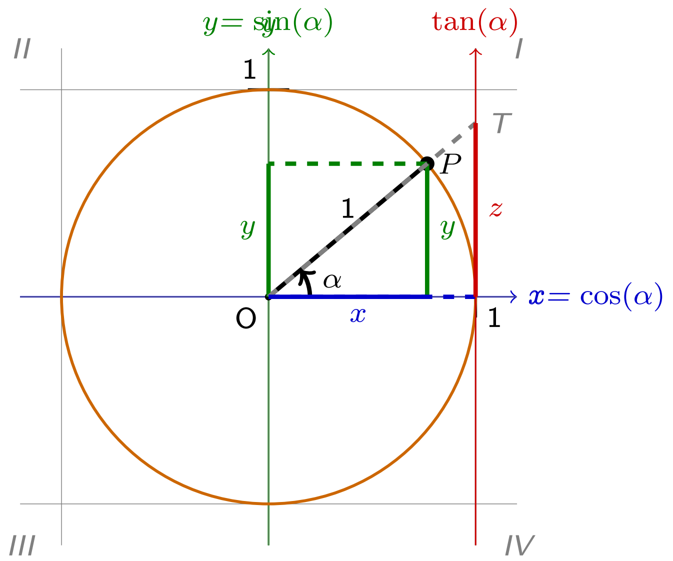
GYMNASE DE BURIER

Chapitre 8 - Trigonométrie II

Sarah Dégallier Rochat

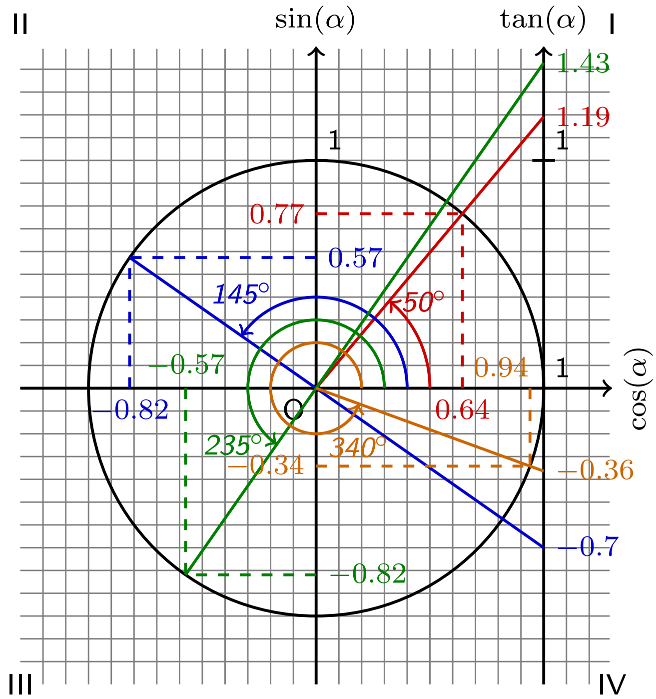
3. Le cercle trigonométrique

Pour représenter les fonctions trigonométriques, on utilise un cercle de rayon 1, appelé le cercle trigonométrique.



$$\cos(\alpha) = \frac{x}{1} = x \qquad \sin(\alpha) = \frac{y}{1} = y \qquad \tan(\alpha) = \frac{z}{1} = z$$

Exemple 3.1 Placer les angles $50°$, $145°$, $235°$ et $340°$ sur le cercle ci-dessous et en déduire une valeur approchée de leur sinus, cosinus et tangente.



$\cos(50°) = 0.64$
$\sin(50°) = 0.77$
$\tan(50°) = 1.19$

$\cos(145°) = -0.82$
$\sin(145°) = 0.57$
$\tan(145°) = -0.7$

$\cos(235°) = -0.57$
$\sin(235°) = -0.82$
$\tan(235°) = 1.43$

$\cos(340°) = 0.94$
$\sin(340°) = -0.34$
$\tan(340°) = -0.36$

Définition 3.1 Le cercle trigonométrique est composé de :

1. un système d'axes
2. un cercle de rayon 1 centré à l'origine
3. un axe vertical passant par la point (1,0)

Le cercle trigonométrique nous permet de généraliser les fonctions trigonométriques $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$ aux angles non aigus.

Exemple 3.1 Calculer avec la calculatrice les expressions suivantes. Résoudre ensuite l'équation $\sin(x) = 0.5$ pour les angles entre $0°$ et $360°$. Que remarque-t-on ?

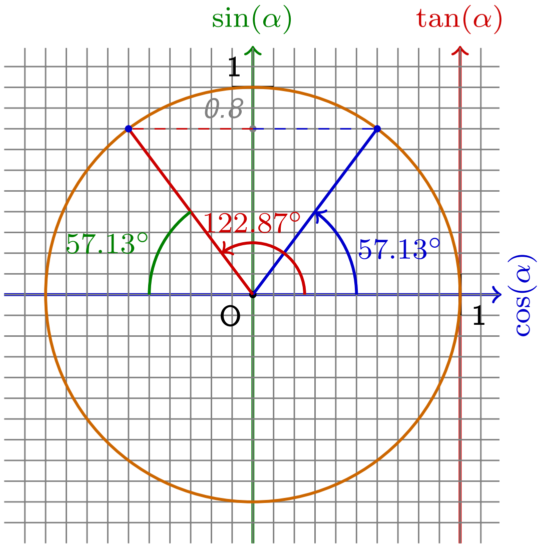
1. $\sin(30°) = 0.5$
2. $\sin(150°) = 0.5$

On résoud l'équation

$$\sin(x) = 0.5 \Rightarrow x = \sin^{-1}(0.5) \Leftrightarrow x = 30°$$

L'équation $\sin(x) = 0.5$ *a donc plusieurs solutions* ($30°$ *et* $150°$)*, mais la calculatrice n'en donne qu'une seule* ($x = 30°$)*. On doit utiliser le cercle trigonométrique pour trouver les autres solutions.*

Exercice 3.1 Pour quels angles entre $0°$ et $360°$ a-t-on $\sin(\alpha) = 0.8$?



On trouve deux solutions :

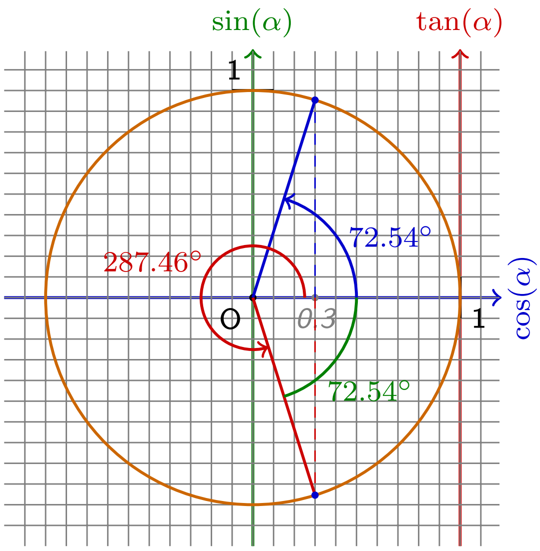
$$\alpha_1 = 57.13°$$

$$\alpha_2 = 180 - 57.13 = 122.87°$$

Règle 3.1 On peut observer que

$$\boxed{\sin(\alpha) = \sin(180 - \alpha)}$$

Exercice 3.2 Pour quels angles entre $0°$ et $360°$ a-t-on $\cos(\alpha) = 0.3$?



On trouve deux solutions :

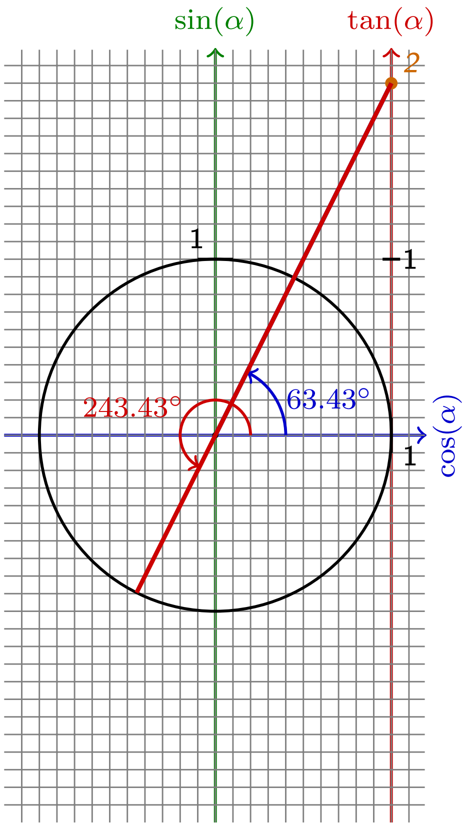
$$\alpha_1 = 73.54°$$

$$\alpha_2 = 360 - 72.54 = 287.46°$$

Règle 3.2 On peut observer que

$$\boxed{\cos(\alpha) = \cos(360 - \alpha)}$$

Exemple 3.3 Pour quels angles entre $0°$ et $360°$ a-t-on $\tan(\alpha) = 2$?



On obtient comme solutions

$$\alpha_1 = 63.43°$$

et

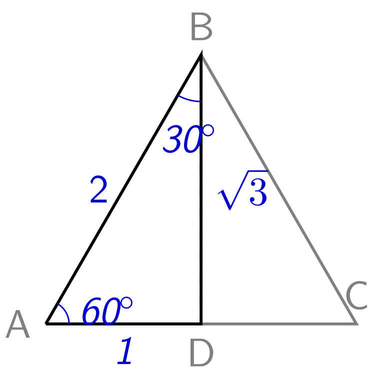
$$\alpha_2 = 180+63.43 = 243.43°$$

Règle 3.3 On peut observer que

$$\boxed{\tan(\alpha) = \tan(180+\alpha)}$$

Angles particuliers

Exemple 3.4 Trouver la valeur exacte du sinus, cosinus et de la tangente des angles $30°$ et $60°$.



Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2 et de hauteur BD. Le triangle ABD est rectangle. Par Pythagore, la hauteur mesure

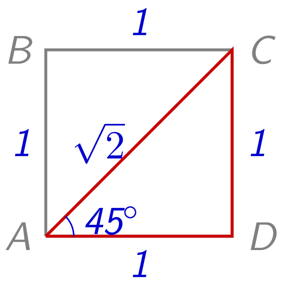
$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\cos(60°) = \frac{1}{2} \qquad \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin(30°) = \frac{1}{2}$$

$$\tan(60°) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad \tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exemple 3.5 Trouver la valeur exacte du sinus, cosinus et de la tangente de l'angle $45°$.

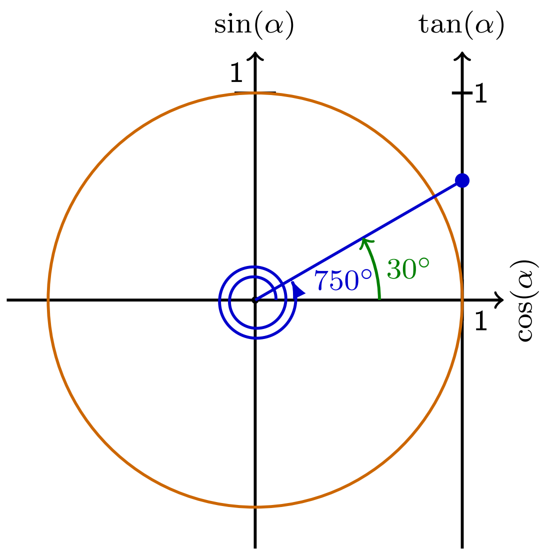


Soit ABCD un carré de côté 1. On considère le triangle rectangle ACD.Par Pythagore, la hauteur mesure

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

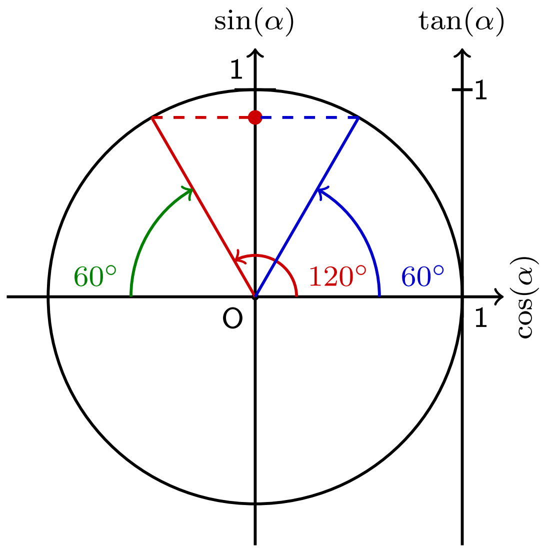
$$\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \tan(45°) = \frac{1}{1} = 1$$

Exemple 3.6 Trouver la valeur exacte de $\tan(750°)$ en vous aidant du cercle trigonométrique.



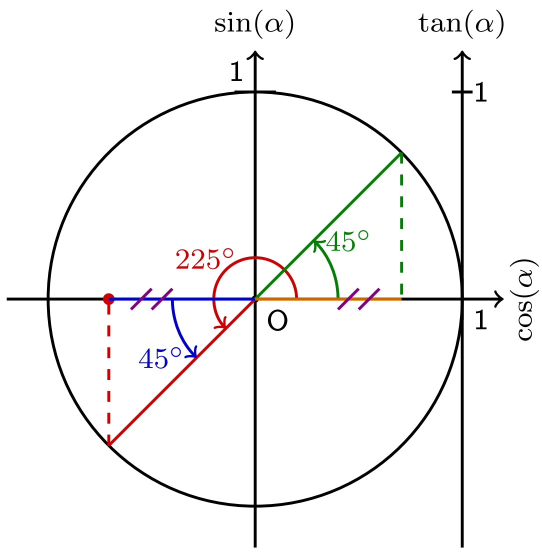
$$\tan(750°) = \tan(30° + 2 \cdot 360°) = \tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exemple 3.6 Trouver la valeur exacte de $\sin(120°)$ en vous aidant du cercle trigonométrique.



$$\sin(120°) = \sin(180° - 60°) = \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exemple 3.6 Trouver la valeur exacte de $\cos(225°)$ en vous aidant du cercle trigonométrique.



$$\cos(225°) \quad = \quad \cos(180° + 45°) = -\cos(45°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

4. Triangles quelconques

Rappel : Relations fondamentales

a) $\cos(\alpha) = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

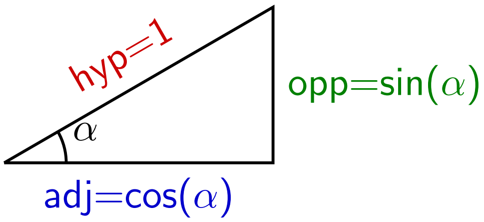
b) $\sin(\alpha) = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

c) $\tan(\alpha) = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$

Si $hyp = 1$, alors ;

a) $\cos(\alpha) = \frac{\text{adj}}{1} = \text{adj}$

b) $\sin(\alpha) = \frac{\text{opp}}{1} = \text{opp}$



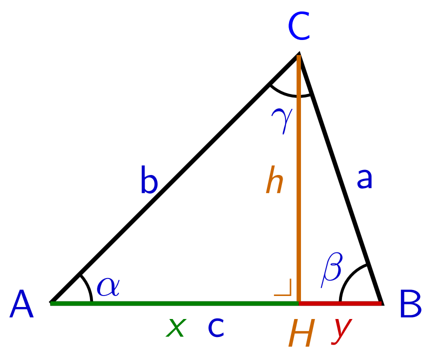
On a donc

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\textit{opp}}{\textit{adj}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

Par Pythagore, on a que $\textit{adj}^2 + \textit{opp}^2 = \textit{hyp}^2$, *et donc*

$$\boxed{\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1}$$

Soit ABC un triangle quelconque de côtés a,b,c et d'angles α, β, γ.



Théorème du cosinus

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{aligned}$$

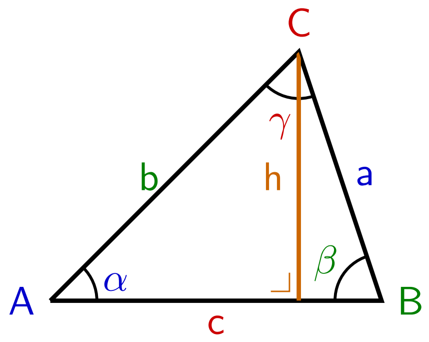
Démonstration. *Nous démontrons la relation* $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$. *Appelons* x *le segment* $\overline{AH}$ *et* y $\overline{HB}$. *On a*

$$\sin(\beta) = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a\sin(\beta) \qquad \cos(\beta) = \frac{y}{a} \Rightarrow y = a\cos(\beta)$$

Par Pythagore :

$$\begin{aligned} b^2 &= x^2 + h^2 = (c - a\cos(\beta))^2 + (a\sin(\beta))^2 \\ &= c^2 - 2ac\cos(\beta) + a^2\cos^2(\beta) + a^2\sin^2(\beta) \\ &= c^2 - 2ac\cos(\beta) + a^2(\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)) \\ &= c^2 - 2ac\cos(\beta) + a^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \qquad \square \end{aligned}$$

Soit ABC un triangle quelconque de côtés a,b,c et d'angles α, β, γ.



Théorème de l'aire

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)\\ \mathcal{A} &= \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)\\ \mathcal{A} &= \frac{1}{2}ac\sin(\beta)\end{aligned}$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire du triangle ABC.

Démonstration : *Nous démontrons l'identité* $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$. *Les autres identités se démontrent de manière analogue.*

Soit h *la hauteur issue de* C. *Le triangle* AHC *est rectangle, on a donc* $h = b\sin(\alpha)$.*Par la formule de l'aire d'un triangle, on a :*

$$\mathcal{A} = \frac{\textit{base} \cdot \textit{hauteur}}{2} = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{c \cdot b \cdot \sin(\alpha)}{2} = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$$

□

Exemple 4.1 Soit ABC un triangle tel que $a = 55$, $b = 12$ et $\gamma = 120°$. Résoudre ce triangle.

On calcule l'aire :

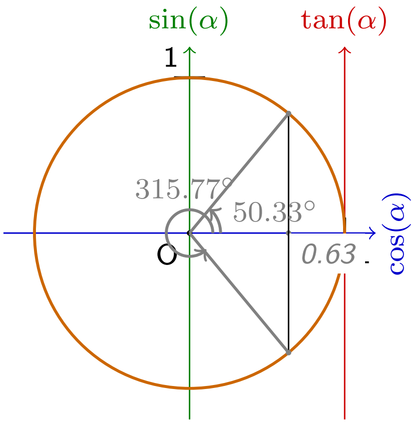
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot (55) \cdot (12) \cdot \sin(120) = \boxed{285.79}$$

On calcule la longueur du côté c *à l'aide du théorème du cosinus :*

$$\begin{aligned} & c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)\\ \Rightarrow\quad & c^2 = (55)^2 + (12)^2 - 2 \cdot (55) \cdot (12) \cdot \cos(120) = 3829\\ \Leftrightarrow\quad & c = \pm\sqrt{3829} = \pm 61.88\\ \Rightarrow\quad & c = \boxed{61.88} \text{ \textit{(Il s'agit d'une longueur, c'est positif)}}\end{aligned}$$

On utilise le théorème du cosinus pour trouver l'angle α

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) & &\left|\, -a^2 + 2bc\cos(\alpha)\right.\\ \Leftrightarrow\quad 2bc\cos(\alpha) &= b^2 + c^2 - a^2 & &\left|\, \div(2bc)\right.\\ \Leftrightarrow \cos(\alpha) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} & &\end{aligned}$$



De la relation précédente, on déduit :

$$\begin{aligned}\alpha &= \cos^{-1}\left[\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right] \\ &= \cos^{-1}\left[\frac{12^2+61.88^2-55^2}{2\cdot(12)\cdot(61.88)}\right] \\ &= \cos^{-1}(0.63)\end{aligned}$$

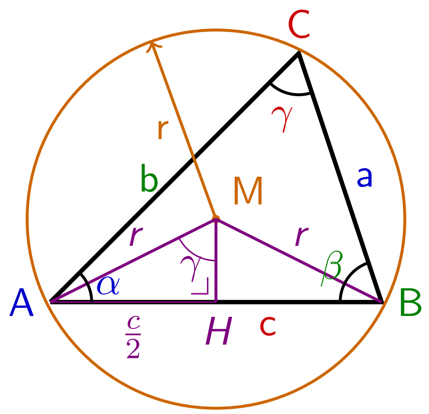
$\Rightarrow \quad \alpha_1 = 50.33$ *ou* $\alpha_2 = 360 - 50.33 = 309.67$

$\Rightarrow \quad \alpha = \boxed{50.33^\circ}$

(Les angles d'un triangle sont plus petits que 180°)

Finalement $\beta = 180 - \alpha - \gamma = 180 - 50.33 - 120 = \boxed{9.67^\circ}$

Soit ABC un triangle quelconque de côtés a,b,c et d'angles α, β, γ (avec $0 < \alpha < 180$, $0 < \beta < 180$ et $0 < \gamma < 180$)



Théorème du sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r$$

où r est le rayon du cercle circonscrit

Démonstration. *Nous démontrons* $\dfrac{c}{\sin(\gamma)} = 2r$.

Soit le triangle AMB isocèle en M et MH sa hauteur. Par le théorème de l'angle au centre, $\angle AMB = 2\gamma$. *Le triangle est isocèle, MH est donc aussi la bissectrice et la médiatrice, on a donc que* $\angle AMH = \gamma$ *et* $\overline{AH} = \frac{c}{2}$. *Le triangle* AMH *est rectangle en H, on a donc*

$$\sin(\gamma) = \frac{\frac{c}{2}}{r} = \frac{c}{2r} \Rightarrow \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r \qquad \square$$

Exemple 4.2 Résoudre le triangle ABC donné par $a = 18$, $\beta = 60°$ et $\gamma = 40°$.

On commence par calculer l'angle α :

$$\alpha = 180 - \beta - \gamma = 180 - 60 - 40 = \boxed{80°}$$

On trouve b et c par le théorème du sinus :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \Leftrightarrow b = \frac{a\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{18 \cdot \sin(60)}{\sin(80)} = \boxed{15.83}$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \Leftrightarrow c = \frac{a\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \frac{18 \cdot \sin(40)}{\sin(80)} = \boxed{11.75}$$

On calcule l'aire du triangle

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 15.83 \cdot \sin(40) = \boxed{91.57}$$

Exemple 4.3 Résoudre le triangle ABC tel que $a = 17$, $b = 18$ et $\alpha = 65°$. L'aire n'est pas demandée.

On utilise le théorème du sinus pour trouver β :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \Leftrightarrow \sin(\beta) = \frac{b\sin(\alpha)}{a} = \frac{18 \cdot \sin(65°)}{17} = 0.96$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \sin^{-1}(0.96) = 73.66° \text{ et} \\ \beta_2 = 180° - \beta_1 = 180° - 73.66° = 106.34° \end{cases}$$

Les deux solutions peuvent être valides ! *On résoud pour les deux cas :*

Cas 1 : $\boxed{\beta = 71.89°}$

$$\Rightarrow \gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 63.04° - 71.89° = \boxed{45.07°}$$

On calcule c avec le théorème du sinus :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \Leftrightarrow c = \frac{a\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \frac{(17.34) \cdot \sin(45.07°)}{\sin(63.04)} = \boxed{13.77}$$

Cas 2 : $\boxed{\beta = 108.11^\circ}$

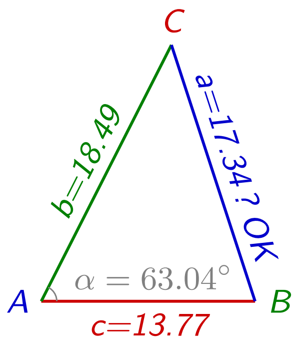
$\Leftrightarrow \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 63.04^\circ - 108.11^\circ = \boxed{8.85^\circ}$

On calcule c avec le théorème du sinus :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \Leftrightarrow c = \frac{a\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \frac{(17.34)\cdot\sin(8.85^\circ)}{\sin(63.04)} = \boxed{2.99}$$

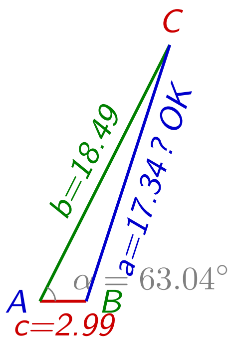
Construisons les triangles pour vérifier si les réponses sont valides !

Cas 1 :



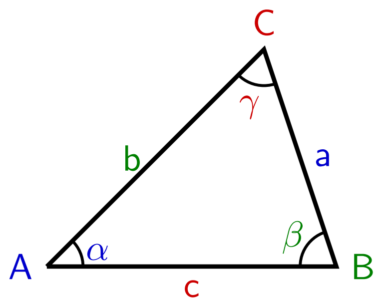
Le triangle est **constructible**.
Cette solution est donc **valide**.

Cas 2 :



Le triangle est **constructible**.
Cette solution est donc **valide**.

Autre méthode de vérification



Dans un triangle, le plus grand angle correspond au plus grand côté et le petit au plus petit côté. Par exemple, si

$$\boxed{\beta > \gamma > \alpha \Leftrightarrow b > c > a}$$

Cas 1 :

- $a = 17.34$, $\alpha = 63.04^\circ$
- $b = 18.49$, $\beta = 71.89^\circ$
- $c = 13.77$, $\gamma = 45.07^\circ$

On vérifie, on a bien :

$$\beta > \alpha > \gamma \Leftrightarrow b > a > c$$

Le triangle est **constructible**.
Cette solution est donc **valide**.

Cas 2 :

- $a = 17.34$, $\alpha = 63.04^\circ$
- $b = 18.49$, $\beta = 71.89^\circ$
- $c = 2.99$, $\gamma = 8.85^\circ$

On vérifie, on a bien :

$$\beta > \alpha > \gamma \Leftrightarrow b > a > c$$

Le triangle est **constructible**.
Cette solution est donc **valide**.

Exemple 4.4 Résoudre le triangle tel que $\beta = 30°$, $a = 10$ et $b = 36$. L'aire n'est pas demandée.

On utilise le théorème du sinus pour trouver α :

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin(\alpha)} &= \frac{b}{\sin(\beta)} \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{a\sin(\beta)}{b} = \frac{10\cdot\sin(30°)}{36} = 0.14\\ \Rightarrow \alpha_1 &= \sin^{-1}(0.14) = 7.98° \text{ et } \alpha_2 = 180° - \alpha_1 = 180° - 7.98° = 172.02°\end{aligned}$$

On résoud pour les deux cas :

Cas 1 : $\boxed{\alpha = 7.98°}$

$\Rightarrow \gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 7.89° - 30° = \boxed{142.02°}$

On calcule c avec le théorème du sinus :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \Leftrightarrow c = \frac{a\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \frac{10\cdot\sin(142.02°)}{\sin(7.98)} = \boxed{44.31}$$

On vérifie $10 < 36 < 44.31$ et $7.98° < 30° < 142.02° \Rightarrow$ OK

Cas 2 : $\boxed{\alpha = 172.02°}$ $\Rightarrow \gamma = 180° - 172.02° - 30° = -22.02° < 0$

On ne peut pas avoir d'angle négatif dans un triangle. Le deuxième cas n'est donc pas possible.

Exercice de groupe Soit un triangle tel que $\alpha = 60°$ et $b = 2$ cm. Discuter le nombre de cas possibles en fonction de la longueur du segment a.