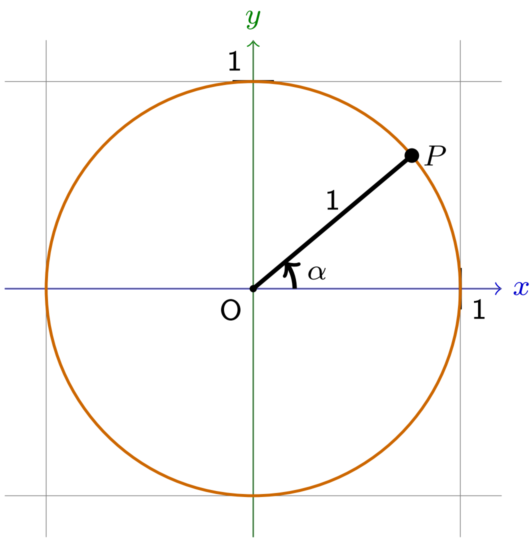
GYMNASE DE BURIER

Chapitre 8 - Trigonométrie II

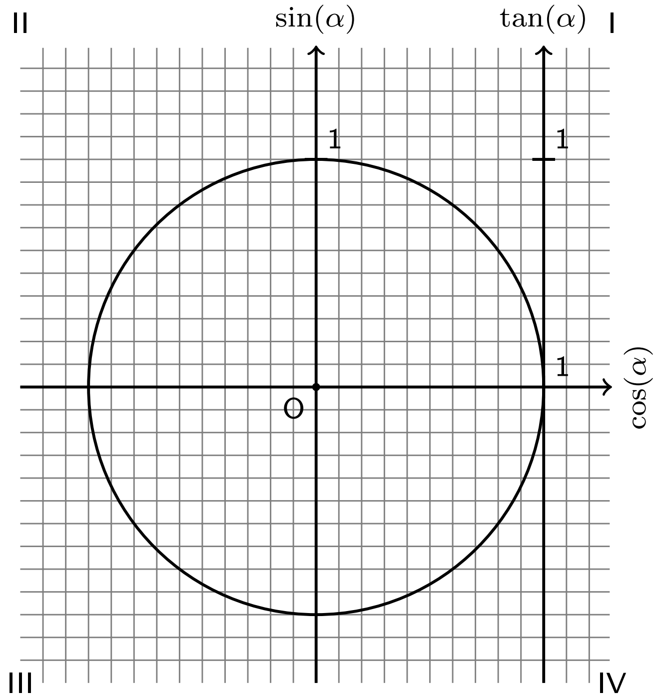
Sarah Dégallier Rochat

3. Le cercle trigonométrique

Pour représenter les fonctions trigonométriques, on utilise un cercle de rayon 1, appelé le cercle trigonométrique.



Exemple 3.1 Placer les angles $50°$, $145°$, $235°$ et $340°$ sur le cercle ci-dessous et en déduire une valeur approchée de leur sinus, cosinus et tangente.



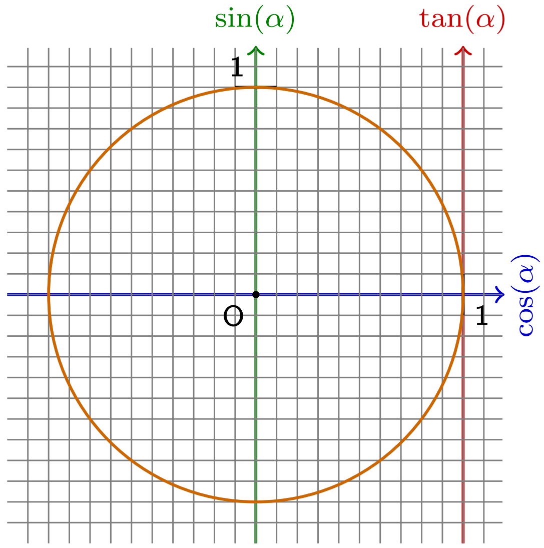
Définition 3.1 Le cercle trigonométrique est composé de :

1. un système d'axes
2. un cercle de rayon 1 centré à l'origine
3. un axe vertical passant par la point (1,0)

Le cercle trigonométrique nous permet de généraliser les fonctions trigonométriques $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$ aux angles non aigus.

Exemple 3.1 Calculer avec la calculatrice les expressions suivantes. Résoudre ensuite l'équation $\sin(x) = 0.5$ pour les angles entre $0°$ et $360°$. Que remarque-t-on ?

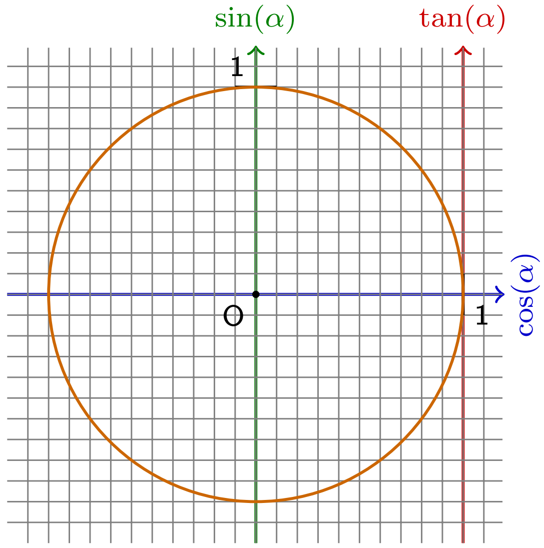
Exercice 3.1 Pour quels angles entre $0°$ et $360°$ a-t-on $\sin(\alpha) = 0.8$?



Règle 3.1 On peut observer que

$$\boxed{\sin(\alpha) = \sin(180-\alpha)}$$

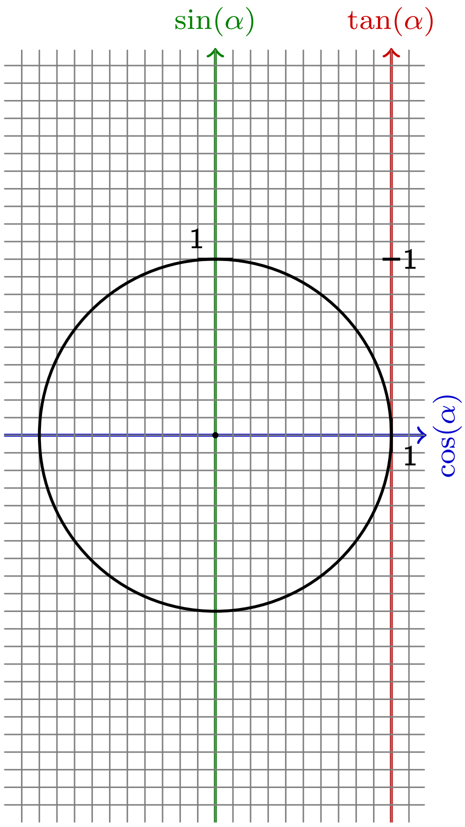
Exercice 3.2 Pour quels angles entre $0°$ et $360°$ a-t-on $\cos(\alpha) = 0.3$?



Règle 3.2 On peut observer que

$$\boxed{\cos(\alpha) = \cos(360-\alpha)}$$

Exemple 3.3 Pour quels angles entre $0°$ et $360°$ a-t-on $\tan(\alpha) = 2$?

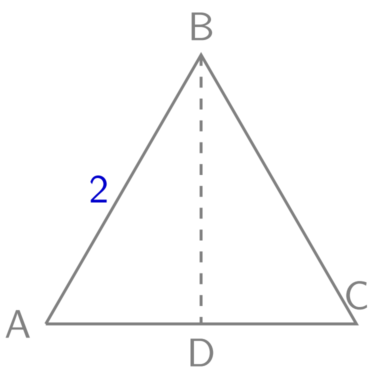


Règle 3.3 On peut observer que

$$\boxed{\tan(\alpha) = \tan(180+\alpha)}$$

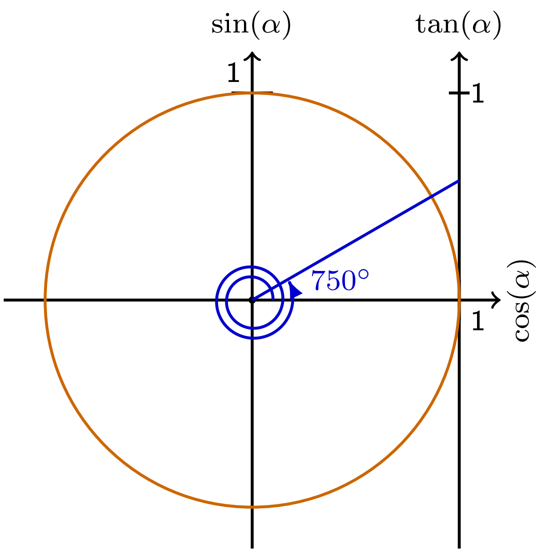
Angles particuliers

Exemple 3.4 Trouver la valeur exacte du sinus, cosinus et de la tangente des angles $30°$ et $60°$.

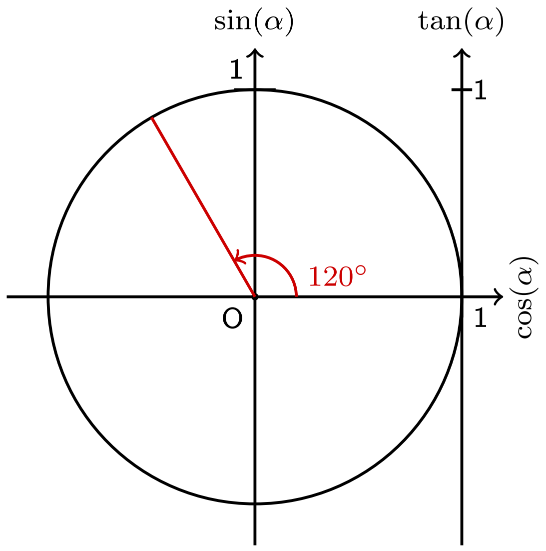


Exemple 3.5 Trouver la valeur exacte du sinus, cosinus et de la tangente de l'angle $45°$.

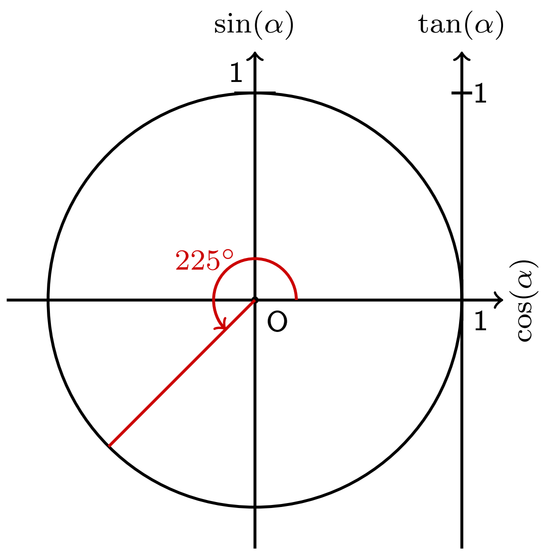
Exemple 3.6 Trouver la valeur exacte de $\tan(750°)$ en vous aidant du cercle trigonométrique.



Exemple 3.6 Trouver la valeur exacte de $\sin(120°)$ en vous aidant du cercle trigonométrique.



Exemple 3.6 Trouver la valeur exacte de $\cos(225°)$ en vous aidant du cercle trigonométrique.



4. Triangles quelconques

Rappel : Relations fondamentales

a) $\cos(\alpha) =$

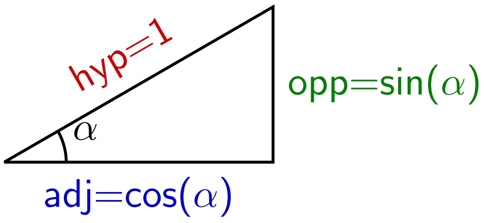
b) $\sin(\alpha) =$

c) $\tan(\alpha) =$

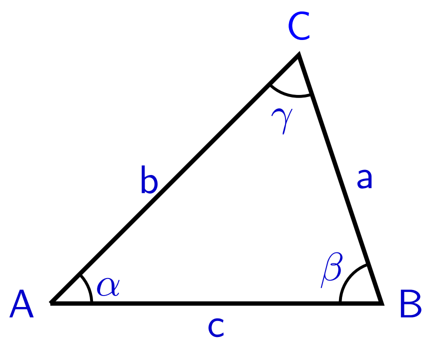
Si $hyp = 1$, alors ;

a) $\cos(\alpha) =$

b) $\sin(\alpha) =$



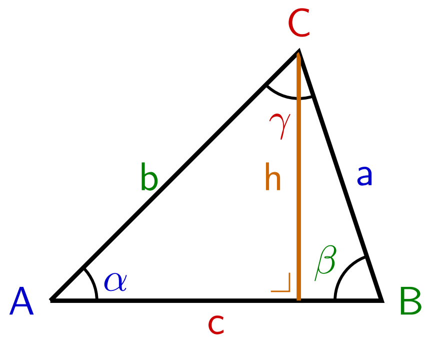
Soit ABC un triangle quelconque de côtés a,b,c et d'angles α, β, γ.



Théorème du cosinus

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{aligned}$$

Soit ABC un triangle quelconque de côtés a,b,c et d'angles α, β, γ.

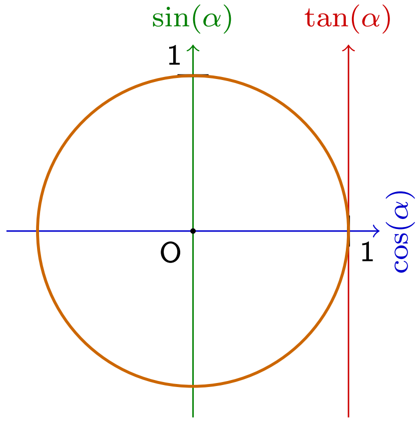


Théorème de l'aire

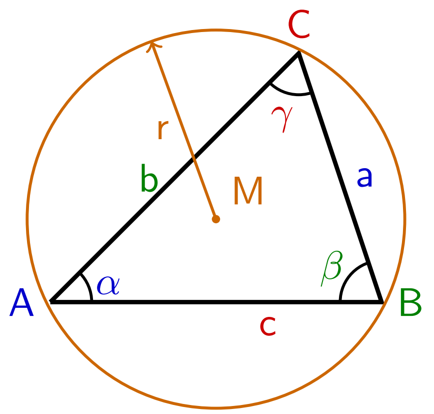
$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)\\ \mathcal{A} &= \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)\\ \mathcal{A} &= \frac{1}{2}ac\sin(\beta)\end{aligned}$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire du triangle ABC.

Exemple 4.1 Soit ABC un triangle tel que $a = 55$, $b = 12$ et $\gamma = 120°$. Résoudre ce triangle.



Soit ABC un triangle quelconque de côtés a,b,c et d'angles α, β, γ (avec $0 < \alpha < 180$, $0 < \beta < 180$ et $0 < \gamma < 180$)



Théorème du sinus

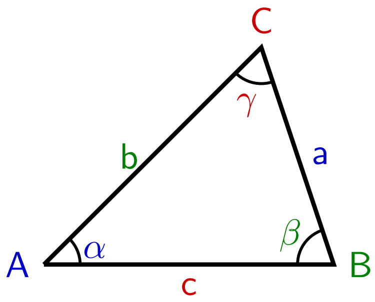
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r$$

où r est le rayon du cercle circonscrit

Exemple 4.2 Résoudre le triangle ABC donné par $a = 18$, $\beta = 60°$ et $\gamma = 40°$.

Exemple 4.3 Résoudre le triangle ABC tel que $a = 17$, $b = 18$ et $\alpha = 65°$. L'aire n'est pas demandée.

Autre méthode de vérification



Dans un triangle, le plus grand angle correspond au plus grand côté et le petit au plus petit côté. Par exemple, si

$$\boxed{\beta > \gamma > \alpha \Leftrightarrow b > c > a}$$

Exemple 4.4 Résoudre le triangle tel que $\beta = 30°$, $a = 10$ et $b = 36$. L'aire n'est pas demandée.

Exercice de groupe Soit un triangle tel que $\alpha = 60°$ et $b = 2$ cm. Discuter le nombre de cas possibles en fonction de la longeur du segment a.