Edition 2007-2008 / DELM

Géométrie métrique

§ 2 Produit scalaire - Exercices

Les exercices dont le numéro contient la lettre A, par exemple 2-A1, sont des exercices complémentaires destinés aux élèves du niveau avancé.

□ Liens hypertextes

Cours correspondant de niveau avancé:

http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/ProduitScalaire2D/ProduitScalaire-Cours_avance.pdf

Cours de niveau standard:

http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/ProduitScalaire2D/ProduitScalaire-Cours_standard.pdf

Exercices de niveau standard:

http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/ProduitScalaire2D/ProduitScalaire-Exercices_standard.pdf

Supports de cours de mathématiques, niveau secondaire II (page mère):

http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/index.html

§ 2.1 Norme d'un vecteur, vecteur unitaire

□ 2 - 1

On donne les coordonnées des points A, B, C dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

Calculez le périmètre du triangle ABC.

a) $A(1;\ 3)$, $B(3;\ 0)$, $C(-5;\ -1)$;

b) $A\left(2;\ \frac{3}{2}\right)$, $B\left(\frac{7}{2};\ \frac{11}{2}\right)$, $C\left(10;\ \frac{3}{2}\right)$.

□ 2 - 2

Dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, on donne $A(5;\ 2)$, $B(6;\ 3)$, $C(7;\ -5)$.

Calculez l'aire du triangle ABC.

□ 2 - 3

La base $\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$ est orthonormée. Calculez les normes des vecteurs suivants:

$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j}$, $\vec{d} = \vec{a} + \vec{c}$, $\vec{e} = \vec{c} - 2\,\vec{b}$, $\vec{f} = 4\,\vec{a} + 3\,\vec{b} - \vec{c}$,

$3\,\vec{c}$, $-7\,\vec{c}$, $k\,\vec{c}$ où $k \in \mathbb{R}$.

□ 2 - 4

Par rapport à la base orthonormée $\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$, on donne

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

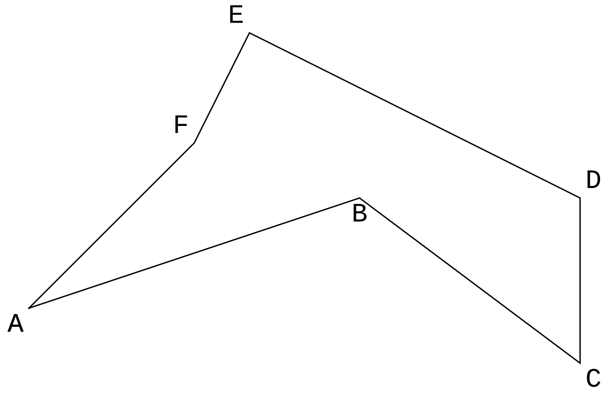
Déterminez les composantes des vecteurs unitaires linéairement dépendants de chacun des vecteurs donnés.

§ 2.2 Produit scalaire de deux vecteurs

Dans les exercices qui suivent, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ qui est orthonormé.

□ 2 - 5

On donne le polygone ABCDEF.



Représentez graphiquement les angles suivants:

$\alpha_1 = \measuredangle\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}\right)$, $\alpha_2 = \measuredangle\left(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CD}\right)$, $\alpha_3 = \measuredangle\left(\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{DE}\right)$,

$\alpha_4 = \measuredangle\left(\overrightarrow{EF},\ \overrightarrow{CD}\right)$, $\alpha_5 = \measuredangle\left(\overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{BC}\right)$, $\alpha_6 = \measuredangle\left(\overrightarrow{FA},\ \overrightarrow{AB}\right)$.

Pour chaque angle, indiquez s'il est aigu, droit ou obtus.

□ 2 - 6

Calculez le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans les cas suivants:

a) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 7$, $\measuredangle\left(\vec{u},\ \vec{v}\right) = 60\,°$.

b) $\|\vec{u}\| = 8\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 3$, $\measuredangle\left(\vec{u},\ \vec{v}\right) = 135\,°$.

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$.

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

□ 2 - 7

a) On donne $\|\vec{u}\| = \frac{13}{2}$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$. Calculez $\measuredangle\left(\vec{u},\ \vec{v}\right)$.

b) On donne $\measuredangle\left(\vec{u},\ \vec{v}\right) = 150\,°$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -30$. Calculez $\|\vec{u}\|$.

c) On donne $\measuredangle\left(\vec{u},\ \vec{v}\right) = 78\,°$, $\|\vec{u}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -30$. Calculez $\|\vec{v}\|$.

d) On donne $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Calculez $\|\vec{u}\|$ et $\measuredangle\left(\vec{u},\ \vec{v}\right)$.

e) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 22$. Calculez y.

□ 2 - 8

Le triangle ABC est tel que $c = 2$, $a = 3$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -3\sqrt{2}$.

Calculez la mesure de l'angle β ainsi que la longueur du côté b.

□ 2 - 9

ABC est un triangle isocèle où $AC = BC = 5\,\text{cm}$ et $AB = 8\,\text{cm}$.

Calculez les produits scalaires $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$.

□ 2 - 10

ABCD est un carré de côté a et de centre O.

Calculez les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CO}$.

□ 2 - 11

Démontrez la proposition suivante: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2 \right)$.

<u>Indication</u>: développez le carré scalaire $\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = \left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \ ....$

■ Directive

Dans les exercices qui suivent, au lieu de faire appel au théorème du cosinus, utilisez les propriétés du produit scalaire.

□ 2 - A 1

Un triangle ABC est tel que $c = 2$, $a = 3$ et $\beta = 135°$.

Calculez les produits scalaires $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

□ 2 - A 2

Les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont tels que $\| \vec{a} \| = 2$, $\| \vec{b} \| = 4$ et $\| \vec{c} \| = 3$.

De plus $\measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 60°$, $\measuredangle\left(\vec{a}, \vec{c}\right) = 180°$ et $\measuredangle\left(\vec{c}, \vec{b}\right) = 120°$.

Calculez le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas suivants:

a) $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} + 2\,\vec{b}$;

b) $\vec{u} = 9\,\vec{a} + 12\,\vec{b}$, $\vec{v} = 3\,\vec{b} - \vec{c}$;

c) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{v} = 3\,\vec{b} - \vec{c}$;

d) $\vec{u} = \vec{a} - 2\,\vec{b} + 4\,\vec{c}$, $\vec{v} = -2\,\vec{a} - \vec{b} - 2\,\vec{c}$.

□ 2 - A 3

ABC est un triangle équilatéral de côté $\sqrt{12}$.

Les points O, D, E sont définis par $\overrightarrow{BO} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Calculez les produits scalaires $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OE}$.

□ 2 - A 4

ABC est un triangle équilatéral de côté a ($a > 0$).

Les points O, D, E sont définis par $\overrightarrow{BO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE} = k\,\overrightarrow{BC}$ où $k \in \mathbb{R}$.

a) Exprimez, en fonction de k, le produit scalaire $\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{ED}$.

b) Calculez les valeurs de k pour lesquelles l'angle $\widehat{OED}$ est droit.

c) Par la méthode du cercle de Thalès, déterminez graphiquement les points E d'où l'on voit le segment OD sous un angle droit.

□ 2 - A 5

On donne le trapèze ABCD tel que AB = 14, AD = 6, DC = 12 et $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$.

Déterminez la position d'un point P de AB tel que le triangle DPC soit rectangle en P.

□ 2 - A 6

ABCD est un rectangle. On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

Déterminez l'ensemble des points P sur la droite DC tels que l'angle $\widehat{APB}$ est droit.

Discutez en fonction des données $\vec{a}$, $\vec{b}$.

□ 2 - A 7

Démontrez les propositions suivantes (inégalités de Cauchy-Schwarz):

a) $\|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2 - \left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)^2 \geq 0$. Indication: écrivez en composantes puis développez.

b) $-\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \leq \vec{u}\cdot\vec{v} \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$. Indication: utilisez la définition du produit scalaire.

□ 2 - A 8

Par une méthode algébrique, démontrez la proposition suivante (inégalité du triangle):
$\left|\,\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\,\right| \leq \|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

<u>Indication</u>: utilisez les propositions des exercices 2-A7b et 2-11.

□ 2 - A 9

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. Déterminez les vecteurs $\vec{v}, \vec{w}$ pour que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$ et $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w} = \vec{0}$.

Représentez graphiquement la situation.

□ 2 - A 10

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$, $\|\vec{w}\| = 13$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2$ et $\vec{u}\cdot\vec{w} = 6$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\vec{v}\cdot\vec{w}$? Représentez graphiquement la situation.

<u>Indication</u>: utilisez une base orthonormée dont le premier vecteur est un multiple de $\vec{u}$.

□ 2 - 12

Dans chacun des cas suivants, dites si les deux vecteurs sont orthogonaux. Sinon, calculez l'angle entre les vecteurs:

a) $\vec{u} = \frac{3}{4}\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \frac{7}{3}\vec{i} + \frac{7}{4}\vec{j}$.

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

□ 2 - 13

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculez les produits scalaires $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{v}\cdot\vec{w}$, $\vec{w}\cdot\vec{z}$.

b) Calculez $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$, $(\vec{u}-\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{z}$, $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{z})$.

c) Calculez les angles $\measuredangle(\vec{u},\ \vec{v})$, $\measuredangle(\vec{v},\ \vec{w})$, $\measuredangle(\vec{w},\ \vec{z})$, $\measuredangle(\vec{u}+\vec{v},\ \vec{w})$.

□ 2 - 14

Déterminez, dans chacun des cas, la ou les valeurs de x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux:

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ 1-3x \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} x+5 \\ -1-3x \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3x+2 \\ x+1 \end{pmatrix}$.

□ 2 - 15

On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Déterminez a, b pour que $\|\vec{u}\| = 8$ et $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Représentez graphiquement la situation.

□ 2 - 16

a) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Déterminez a, b afin que $\vec{u}, \vec{v}$ soient linéairement dépendants et $\|\vec{u}\| = 3$.

b) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Déterminez a, b afin que $\vec{u}, \vec{v}$ soient orthogonaux et $\|\vec{u}\| = 3$.

□ 2 - 17

Soient $A(-6;\ -8)$, $B(3;\ 4)$, $C(9;\ -2)$ les sommets d'un triangle. G est le centre de gravité du triangle.

a) Déterminez les coordonnées de G.

b) Vérifiez l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GC}} + \overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}} = -\overrightarrow{\mathrm{GA}}^2$.

c) Calculez la mesure de l'angle $\widehat{AGB}$.

□ 2 - 18

Par rapport à la base orthonormée $\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$, on donne le vecteur $\vec{u} = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$.

Déterminez une nouvelle base orthonormée $\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$ telle que

$\vec{a}$ ait la même direction et le même sens que $\vec{u}$ et
$\vec{b}$ soit l'image de $\vec{a}$ par une rotation de 90° dans le sens direct.

§ 2.3 Projections orthogonales

□ 2 - A 11

Dans la base orthonormée $\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$, on donne le vecteur $\vec{v} = 3\,\vec{i} - \vec{j}$.

a) Calculez $P_{\vec{i}}\left(\vec{v}\right)$, $P_{\vec{j}}\left(\vec{v}\right)$, $P_{\vec{i}+\vec{j}}\left(\vec{v}\right)$ et représentez graphiquement la situation.

b) Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire multiple de $\vec{v}$. Déduisez de la partie a) les projections $P_{\vec{i}}\left(\vec{u}\right)$, $P_{\vec{j}}\left(\vec{u}\right)$, $P_{\vec{i}+\vec{j}}\left(\vec{u}\right)$.

□ 2 - A 12

Dans chacune des situations suivantes, représentez graphiquement et calculez $P_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right)$:

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; pour la partie a), il est demandé d'établir la formule utilisée.

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

□ 2 - A 13

On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{w}$ est un multiple de $\vec{u}$ et sa projection orthogonale dans la direction de $\vec{v}$ est $-\frac{1}{2}\,\vec{v}$. Quel est ce vecteur $\vec{w}$?

□ 2 - A 14

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$. Déterminez le vecteur $\vec{w}$ tel que $P_{\vec{u}}\left(\vec{w}\right) = \frac{1}{2}\,\vec{u}$ et $P_{\vec{v}}\left(\vec{w}\right) = \frac{3}{4}\,\vec{v}$.

□ 2 - A 15

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminez l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ tels que $\left\| \vec{v} \right\| = 1$ et $P_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right) = \frac{1}{4}\,\vec{u}$.

b) Existe-t-il un vecteur $\vec{v}$ tel que $\left\| \vec{v} \right\| = 1$ et $P_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right) = \vec{u}$?

2 - A 16

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminez l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ tels que $P_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right) = \vec{v}$.

b) Déterminez l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ tels que $P_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right) = \vec{u}$.

Exercices divers

□ 2 - A 17

Démontrez que la somme des carrés des longueurs des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs des diagonales.

Indication: Reformuler le problème sous forme vectorielle

Hypothèses : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Conclusion : $2\,\overrightarrow{AB}^2 + 2\,\overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2$

□ 2 - A 18

Appelons "cerf-volant" un quadrilatère ABCD tel que AB = AD et CB = CD.

Démontrez que les diagonales d'un cerf-volant se coupent à angle droit.

Indication:

1) Reformuler le problème sous forme vectorielle

Hypothèses : $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AD}^2$ et $\overrightarrow{CB}^2 = \overrightarrow{CD}^2$

Conclusion : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

2) Utiliser les hypothèses, c'est-à-dire
développer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ de manière à faire apparaître $\overrightarrow{AB}^2$ que l'on remplace par $\overrightarrow{AD}^2$;
faire apparaître $\overrightarrow{CB}^2$ que l'on remplace par $\overrightarrow{CD}^2$.

3) Simplifier l'expression, c'est-à-dire la réduire à zéro ou à la forme $k \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ avec $k \neq 1$.

□ 2 - A 19

Démontrez que les trois hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes.

Indication : Soit K le point d'intersection des hauteurs issues de A et de B. Il faut montrer que K appartient à la hauteur issue de C, ce qu'on peut reformuler sous forme vectorielle

Hypothèses : $\overrightarrow{KA} \perp \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{KB} \perp \overrightarrow{AC}$

Conclusion : $\overrightarrow{KC} \perp \overrightarrow{AB}$

□ 2 - A 20

Démontrez le théorème de la hauteur : Soit ABC un triangle rectangle en A; notons D le pied de la hauteur issue de A. On a alors la relation $\| AD \|^2 = \| BD \| \cdot \| DC \|$.

Indication : Reformulez d'abord le théorème sous forme vectorielle

Hypothèses : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$

Conclusion : $\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$