Marcel Délèze

§ 1 Systèmes d'équations linéaires

3[e] et 4[e] année post-obligatoire [1[e] et terminale de lycée], option scientifique

§ 1.1 Systèmes d'équations linéaires

Exemple

Le système suivant est appelé « système de 3 équations à 4 inconnues » :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & -x_2 & +4x_3 & -5x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & -4x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & 5 \\ 5x_1 & +x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 1 \end{array}\right\}$$ (ou avec une seule accolade, à gauche).

Entre deux équations, il faut comprendre que le connecteur « et » s'y trouve implicitement ; c'est pourquoi on parle parfois d'équations « simultanées ».

Ici, chaque équation est **linéaire** : chaque terme est soit le produit d'une constante par une inconnue, soit une constante. En particulier, aucun des termes suivants n'apparaît :

$$x_3 x_4 \quad , \quad x_1^2 \quad , \quad \frac{1}{x_3} \quad , \quad \sqrt{x_1} \quad , \quad |x_3| \quad .$$

Forme générale d'un système d'équations linéaires

Un système de m équations linéaires à n inconnues est de la forme

$$\left\{\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \ldots & & & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

Les constantes réelles $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ sont appelées « les coefficients du système ».

L'ensemble des solutions du système est l'ensemble des n-uples $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ qui vérifient le système.

Deux systèmes d'équations sont **équivalents** si et seulement si leurs ensembles des solutions sont égaux.

§ 1.2 Transformations élémentaires

Introduisons une notations pour désigner les lignes du système :

$$\begin{aligned} L_1(\vec{x}) &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n-b_1 \\ L_2(\vec{x}) &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n-b_2 \\ &\dots \\ L_m(\vec{x}) &= a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n-b_m \end{aligned}$$

Avec cette notation, le système d'équations s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} L_1(\vec{x}) &=& 0 \\ L_2(\vec{x}) &=& 0 \\ &...& \\ L_m(\vec{x}) &=& 0 \end{array}\right\}$$

Première transformation élémentaire

La première transformation élémentaire consiste à permuter deux lignes. Symboliquement,

$$L'_j \leftarrow L_k;\ \ L'_k \leftarrow L_j$$

Lorsque, à un système d'équations, on applique cette transformation élémentaire, on obtient un système d'équations équivalent. Il s'agit simplement d'une propriété du connecteur « et ». Par exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcl} L_1(\vec{x}) &=& 0 \\ L_2(\vec{x}) &=& 0 \\ L_3(\vec{x}) &=& 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} L_3(\vec{x}) &=& 0 \\ L_2(\vec{x}) &=& 0 \\ L_1(\vec{x}) &=& 0 \end{array}\right\}$$

Deuxième transformation élémentaire

La deuxième transformation élémentaire consiste à multiplier une ligne par une constante **non nulle**. Symboliquement,

$$L'_j \leftarrow \lambda L_j \quad où \quad \lambda \neq 0$$

Lorsque, à un système d'équations, on applique cette transformation élémentaire, on obtient un système équivalent.

En effet, considérons les systèmes

$$\text{I)} \quad \left\{\begin{array}{rcl} L_1(\vec{x}) &=& 0 \\ L_2(\vec{x}) &=& 0 \\ &...& \\ L_j(\vec{x}) &=& 0 \\ &...& \\ L_m(\vec{x}) &=& 0 \end{array}\right\} \qquad \text{II)} \quad \left\{\begin{array}{rcl} L_1(\vec{x}) &=& 0 \\ L_2(\vec{x}) &=& 0 \\ &...& \\ \lambda L_j(\vec{x}) &=& 0 \\ &...& \\ L_m(\vec{x}) &=& 0 \end{array}\right\}$$

“ $\Rightarrow$ ” Si $\vec{x}$ est solution du système I, alors $L_j(\vec{x}) = 0$, donc $\lambda L_j(\vec{x}) = 0$, et $\vec{x}$ est aussi solution du système II.

“ $\Leftarrow$ ” Si $\vec{x}$ est solution du système II, alors $\lambda L_j(\vec{x}) = 0$. Puisque $\lambda \neq 0$, on peut déduire que $L_j(\vec{x}) = 0$, donc $\vec{x}$ est aussi solution du système I. $\blacksquare$

Troisième transformation élémentaire

La troisième transformation élémentaire consiste à ajouter, à une ligne, un certain nombre de fois **autre** ligne ; symboliquement,

$$L'_j \leftarrow L_j + \mu L_i \quad où \quad j \neq i$$

Lorsque, à un système d’équations, on applique cette transformation élémentaire, on obtient un système équivalent. En effet, considérons les deux systèmes

$$\text{I)} \left\{ \begin{array}{c} L_1(\vec{x}) = 0 \\ \dots \\ L_i(\vec{x}) = 0 \\ \dots \\ L_j(\vec{x}) = 0 \\ \dots \\ L_m(\vec{x}) = 0 \end{array} \right\} \qquad \text{II)} \left\{ \begin{array}{c} L_1(\vec{x}) = 0 \\ \dots \\ L_i(\vec{x}) = 0 \\ \dots \\ L_j(\vec{x}) + \mu L_i(\vec{x}) = 0 \\ \dots \\ L_m(\vec{x}) = 0 \end{array} \right\}$$

“ $\Rightarrow$ ” Si $\vec{x}$ est solution du système I, alors $L_i(\vec{x}) = 0$ et $L_j(\vec{x}) = 0$ donc $L_j(\vec{x}) + \mu L_i(\vec{x}) = 0$, et $\vec{x}$ est aussi solution du système II.

“ $\Leftarrow$ ” Si $\vec{x}$ est solution du système II, alors $L_j(\vec{x}) + \mu L_i(\vec{x}) = 0$. Puisque $i \neq j$, on a, sur une autre ligne, $L_i(\vec{x}) = 0$. Donc $L_j(\vec{x}) = 0$ et $\vec{x}$ est aussi solution du système I.

§ 1.3 Résolution de systèmes d’équations linéaires

Réduction à la forme triangulaire

Une méthode pour résoudre un système d’équations linéaires consiste à le transformer en un système triangulaire.

En nous limitant au membre de gauche (coefficients des inconnues), définissons d’abord les éléments diagonaux :

$$\begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \underline{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \underline{a_{33}} & a_{34} \end{pmatrix}$$

si $m \leqslant n$, les éléments diagonaux sont $a_{11}, \; a_{22}, \; \dots, \; a_{mm}$

$$\begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \underline{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \underline{a_{33}} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

si $m \geqslant n$, les éléments diagonaux sont $a_{11},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{nn}$

Un système est appelé **triangulaire supérieur** si tous les coefficients situés au-dessous de la diagonale sont nuls : $a_{ij} = 0 \quad pour \quad i > j$.

Exemple 1

Résolution d'un système d'équations linéaires par réduction à la forme triangulaire.

$$\begin{Bmatrix} & 5x_2 & +2x_3 & = & 3 \\ x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 \end{Bmatrix}$$

Étape 1 a) : le coefficient diagonal a_{11} doit être non nul ; ici, pour y parvenir, permutons les lignes 1 et 2 :

$$\begin{Bmatrix} \underline{x_1} & +3x_2 & -x_3 & = & 5 \\ & 5x_2 & +2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 \end{Bmatrix}$$

le premier coefficient diagonal non nul $a'_{11} = 1$ est appelé « premier pivot » ; la première ligne ne sera plus modifiée.

Étape 1 b) : Par des transformations élémentaires, on élimine tous les coefficients qui se trouvent au-dessous du premier pivot ; ici, la deuxième ligne possède déjà la forme voulue ; la troisième ligne est modifiée comme suit : $L'_3 \leftarrow (-1) L_3$; $L''_3 \leftarrow L'_3 + 2L_1$; ce que nous notons comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \underline{x_1} & +3x_2 & -x_3 & = & 5 & | \cdot 2 \\ & 5x_2 & +2x_3 & = & 3 & \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 & | \cdot (-1) \end{Bmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{Bmatrix} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 5 \\ & 5x_2 & +2x_3 & = & 3 \\ & 7x_2 & -3x_3 & = & 9 \end{Bmatrix}$$

Étape 2 a) : Pour poursuivre, le coefficient diagonal a_{22} doit être non nul ; $a_{22} = 5$ est appelé « deuxième pivot » ; les lignes 1 et 2 ne seront plus modifiées.

Étape 2 b) : Par des transformations élémentaires, on élimine tous les coefficients qui se trouvent au-dessous du deuxième pivot ; ici, $L'_3 \leftarrow (-5) L_3$; $L''_3 \leftarrow L'_3 + 7 L_2$; ce que nous notons comme suit :

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 5 & \\ & \underline{5x_2} & +2x_3 & = & 3 & \mid \cdot 7 \\ & 7x_2 & -3x_3 & = & 9 & \mid \cdot(-5) \end{array}\right\}$$

Le système obtenu est triangulaire supérieur :

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 5 \\ & 5x_2 & +2x_3 & = & 3 \\ & & 29x_3 & = & -24 \end{array}\right\}$$

Un tel système se résout par substitutions, de bas en haut :

$$x_3 = -\frac{24}{29}$$

$$x_2 = \frac{3-2x_3}{5} = \frac{27}{29}$$

$$x_1 = 5 - 3x_2 + x_3 = \frac{40}{29}$$

Le système possède une et une seule solution

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40/29 \\ 27/29 \\ -24/29 \end{pmatrix}$$

Exemple 2

On donne le système

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 3 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 5 \end{array}\right\}$$

Réduisons-le à la forme triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrll} \underline{x_1} & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 3 & \mid \cdot(-1) & \mid \cdot(-2) \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1 & \mid \cdot 1 & \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 5 & & \mid \cdot 1 \end{array}\right\}$$

Étape 1 a) : le premier pivot est $a_{11} = 1$.

Étape 1 b) Éliminons les coefficients situés au-dessous du premier pivot : $L'_2 \leftarrow L_2 - L_1$; $L'_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$; on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 3 & \\ & \underline{3x_2} & -3x_3 & +2x_4 & = & -2 & |\cdot(-1) \\ & 3x_2 & -5x_3 & +4x_4 & = & -1 & |\cdot 1 \end{array}\right\}$$

Étape 2 a) : le deuxième pivot est $a_{22} = 3$.

Étape 2 b) : Éliminons le coefficient situé au-dessous du deuxième pivot : $L'_3 \leftarrow L_3 - L_2$.

Nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{llllll} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 3 \\ & 3x_2 & -3x_3 & +2x_4 & = & -2 \\ & & -2x_3 & +2x_4 & = & 1 \end{array}\right\}$$

La réduction à la forme triangulaire est achevée. Le système triangulaire est résolu comme suit :

Remarquons que l'on peut choisir librement la valeur de x_4 , puis calculer les valeurs correspondantes de $x_3,\ x_2,\ x_1$ à partir de x_4 . Le système possède donc une infinité de solutions.

Posons $x_4 = t$ où $t \in \mathbb{R}$ est un nombre réel quelconque appelé **paramètre**. D'où

$$x_3 = \frac{2x_4 - 1}{2} = t - \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{3x_3 - 2x_4 - 2}{3} = \frac{1}{3}t - \frac{7}{6}$$

$$x_1 = x_2 - 2x_3 + x_4 + 3 = -\frac{2}{3}t + \frac{17}{6}$$

L'ensemble des solutions s'écrit

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}t + \frac{17}{6} \\ \frac{1}{3}t - \frac{7}{6} \\ t - \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{17}{6} \\ -\frac{7}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On dit que l'ensemble des solutions est décrit par **un système d'équations paramétriques**

$$\begin{cases} x_1 & = & -\frac{2}{3}t+\frac{17}{6} \\ x_2 & = & \frac{1}{3}t-\frac{7}{6} \\ x_3 & = & t-\frac{1}{2} \\ x_4 & = & t \end{cases}$$

Théorème

Tout système d'équations linéaires peut être mis sous forme triangulaire supérieure au moyen des trois transformations élémentaires du § 1.2.

(Sans démonstration)

Remarque

Si le système possède une et une seule solution, alors les éléments diagonaux sont non nuls (pivots).

Dans une situation plus générale, il peut arriver que des éléments diagonaux soient nuls, par exemple

$$\begin{cases} 2u_1 & +3u_2 & -u_3 & = & 2 \\ & & 4u_3 & = & 3 \end{cases}$$

Équations paramétriques. Équations cartésiennes

Dans l'exemple 2 ci-dessus (pages 5 et 6), nous avons défini un ensemble S de vecteurs de deux manières différentes :

a) par un système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 3 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 5 \end{cases}$$

b) par un système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x_1 & = & -\frac{2}{3}t+\frac{17}{6} \\ x_2 & = & \frac{1}{3}t-\frac{7}{6} \\ x_3 & = & t-\frac{1}{2} \\ x_4 & = & t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{17}{6} \\ -\frac{7}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons précédemment décrit une méthode pour **passer d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique** : il s'agit de résoudre le système d'équations linéaires par réduction à un système triangulaire.

Inversement, pour **passer d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne**, il suffit d'éliminer le paramètre :

$$\left\{\begin{array}{lcc} x_1 & = & -\frac{2}{3}t+\frac{17}{6} \\ x_2 & = & \frac{1}{3}t-\frac{7}{6} \\ x_3 & = & t-\frac{1}{2} \\ x_4 & = & t \end{array}\right.$$

Éliminons le paramètre t :

$$\left\{\begin{array}{lcc} x_1 & = & -\frac{2}{3}x_4+\frac{17}{6} \\ x_2 & = & \frac{1}{3}x_4-\frac{7}{6} \\ x_3 & = & x_4-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 3x_1 & & & +2x_4 & = & \frac{17}{2} \\ & 3x_2 & & -x_4 & = & -\frac{7}{2} \\ & & x_3 & -x_4 & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

qui est un système d'équations cartésiennes.

Exercices du § 1

Exercice 1-1

Résolvez le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} w & +2x & -5y & +4z & = & 1 \\ 2w & -3x & +2y & +3z & = & 18 \\ 4w & -7x & +y & -6z & = & -5 \\ w & +x & -y & +z & = & 1 \end{array}\right\}$$

Exercice 1-2

Résolvez

$$\left\{\begin{array}{rrcr} x & +2y & = & 3 \\ 3x & +y & = & 4 \\ x & -y & = & 5 \end{array}\right\}$$

Exercice 1-3

Résolvez

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & -y & +3z & = & 4 \\ 3x & +4y & -z & = & -5 \\ x & +5y & -4z & = & -9 \end{array}\right\}$$

Exercice 1-4

Résolvez

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -3z & = & 1 \\ 5x & -3y & +z & = & -1 \end{array}\right\}$$

Exercice 1-5

Résolvez

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} w & -3x & +y & -z & = & 2 \\ 2w & +x & -y & +2z & = & 1 \end{array}\right\}$$

Exercice 1-6

A quelle condition a, b, c doivent-ils satisfaire pour que le système possède au moins une solution ?

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -3z & = & a \\ 3x & -y & +2z & = & b \\ x & -5y & +8z & = & c \end{array}\right\}$$

Exercice 1-7

On donne

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & & -3z & = & -3 \\ 2x & +ky & -z & = & -2 \\ x & +2y & +kz & = & 1 \end{array}\right.$$

Déterminez les valeurs de k pour lesquelles le système

a) possède une et une seule solution ;

b) ne possède aucune solution ;

c) possède une infinité de solutions.

Exercice 1-8

Écrivez un système d'équations cartésiennes équivalent au système d'équations paramétriques donné :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 1-9

Même exercice

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

où r et s sont deux paramètres réels.

Exercice 1-10

Écrivez l'équation suivante sous la forme d'un système d'équations paramétriques

$$2x-3y+5z-12 = 0$$

Réponses des exercices du § 1

Exercice 1-1

Une et une seule solution : $\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 1-2

L'ensemble des solutions est vide : $S = \{\ \}$.

Exercice 1-3

Le système possède une infinité de solutions : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ -2+t \\ t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$.

Exercice 1-4

Le système possède une infinité de solutions : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/13+7t \\ 6/13+16t \\ 13t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$.

Exercice 1-5

Le système possède une infinité de solutions : $\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7+2s+5t \\ -3/7+3s+4t \\ 7s \\ -7t \end{pmatrix}, \ s,t \in \mathbb{R}$.

Exercice 1-6

Le système possède au moins une solution si et seulement si $2a-b+c = 0$.

Exercice 1-7

$$\left\{ \begin{array}{cccccll} \underline{x} & & -3z & = & -3 & \mid \cdot 2 & \mid \cdot 1 \\ 2x & +ky & -z & = & -2 & \mid \cdot(-1) & \\ x & +2y & +kz & = & 1 & & \mid \cdot(-1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccl} x & & -3z & = & -3 \\ & -ky & -5z & = & -4 \quad \mid \cdot(-1) \\ & -2y & +(-3-k)z & = & -4 \quad \mid \cdot(-1) \end{array} \right.$$

Permutons les lignes 2 et 3 afin d'avoir un deuxième pivot assurément non nul :

$$\left\{ \begin{array}{cccccl} x & & -3z & = & -3 & \\ & \underline{2y} & +(k+3)z & = & 4 & \mid \cdot k \\ & ky & +5z & = & 4 & \mid \cdot(-2) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x & & -3z & = & -3 \\ & 2y & +(k+3)z & = & 4 \\ & & (k^2+3k-10)z & = & 4k-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & & -3z & = & -3 \\ & 2y & +(k+3)z & = & 4 \\ & & (k-2)(k+5)z & = & 4(k-2) \end{cases}$$

c) Pour $k = 2$, la troisième équation devient $0z = 0$, et le système possède une infinité de solutions : $z = t$, etc.

b) Pour $k = -5$, la troisième équation devient $0z = -28$, et l'ensemble des solutions est vide.

a) Pour $k \in (\mathbb{R} \setminus \{-5, 2\})$, le troisième pivot est non nul, et le système possède une et une seule solution.

Exercice 1-8

$$\begin{cases} 5x & & -3z & = & -10 \\ & 5y & -4z & = & -5 \end{cases}$$

Exercice 1-9

$$7x+6y-5z = -38$$

Lien vers la page mère

Algèbre linéaire et géométrie analytique
https://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/alga/