Corrigé Test 5 - Prétest - Fonctions quadratiques Janvier 2014

Exercice 1.

Soit f la fonction $f(x) = -3x^2 + 12x - 9$.

a) Faire l'étude de cette fonction (zéros, ordonnée à l'origine, coordonnées du sommet, axe de symétrie).

— Ordonnée à l'origine : $c = -9 \Rightarrow H(0; -9)$

— Zéros : On a $f(x) = -3(x^2 - 4y + 3) = -3(x-3)(x-1)$, donc $K_1(1; 0)$ et $K_2(3; 0)$.

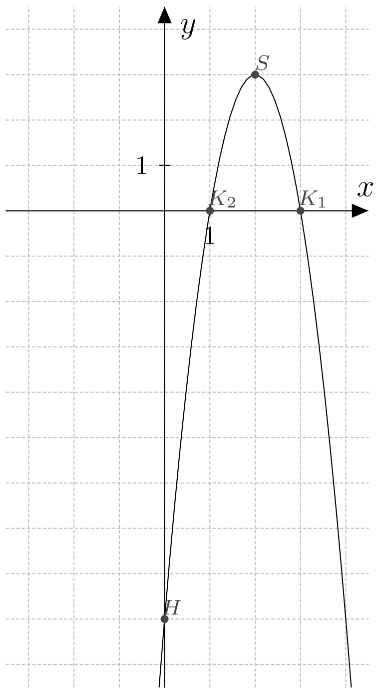
— Sommet : Première coordonnée : Par la moyenne $\frac{1+3}{2} = 2$ ou par la formule $-\frac{b}{2a} = \frac{-12}{-6} = 2$

Deuxième coordonnée : $f(2) = 3$ ou $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{-36}{-12} = 3$

$\Rightarrow S(2; 3)$

— Axe de symétrie : $x = 2$

b) Placer sur le graphique ci-dessous les éléments trouvés en a) et esquisser le graphe de la fonction.



c) Déterminer algébriquement les points d'intersection entre la parabole représentative de f et la parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 7$.

$$\begin{aligned}
&x^2 - 4x + 7 = -3x^2 + 12x - 9 \\
&4x^2 - 16x + 16 = 0 \\
&4(x^2 - 4x + 4) = 0 \\
&4(x-2)^2 = 0 \\
&S = \{2\} \text{ et } f(2) = 3
\end{aligned}$$

Les paraboles sont tangentes et le point d'intersection est $I(2;3)$.

d) Déterminer pour quelle valeur de a la parabole $y = x^2 + a - 9$ est tangente à la parabole représentative de f, puis donner le point d'intersection.

$$\begin{aligned}
&x^2 + a - 9 = -3x^2 + 12x - 9 \\
&4x^2 - 12x + a = 0
\end{aligned}$$

Les paraboles sont tangentes si elles n'ont qu'un point d'intersection, donc si le discriminant est égal à 0.

$$\Delta = 144 - 4 \cdot (-4) \cdot a = 144 - 16 \Rightarrow 144 - 16a = 0 \Rightarrow a = 9$$

Les paraboles sont tangentes si $a = 9$.
Pour trouver le point d'intersection, il faut résoudre $-4x^2 + 12x - 9 = 0$. Comme $\Delta = 0$, on sait que $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-12}{-8} = \dfrac{3}{2}$ et $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{4}$, donc le point d'intersection est $I\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{9}{4}\right)$.

Exercice 2.

Déterminer la fonction quadratique si

a) le sommet est $S(2;0)$ et la fonction passe par le point $(0;8)$.
Le sommet se trouve sur l'axe horizontal, donc l'unique zéro de la fonction est 2. Par conséquent, la fonction est de la forme $f(x) = a(x-2)^2$.
Comme la fonction passe par le point $(0;8)$, on a

$$f(0) = 8 \Rightarrow a(-2)^2 = 8 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2.$$

La fonction recherchée est donc $f(x) = 2(x-2)^2$.

b) les zéros de la fonction sont 1 et -2 et la fonction passe par le point $(-1;6)$.
Comme les zéros de la fonction sont 1 et -2, la fonction est de la forme $f(x) = a(x-1)(x+2)$.
De plus, comme la fonction passe par le point $(-1;6)$, on a

$$f(-1) = 6 \Rightarrow a \cdot (-2) \cdot 1 = 6 \Rightarrow -2a = 6 \Rightarrow a = -3.$$

La fonction recherchée est donc $f(x) = -3(x-1)(x+2)$.

Exercice 3.

Au cours d'une expérience, on remarque que la consommation électrique (mesurée en KWh) évolue durant les premières heures selon la fonction $f(x) = -6x^2 + 210x + 7$, où x désigne le nombre de minutes écoulées depuis le début de l'expérimentation.

a) La consommation électrique au moment de commencer l'expérience est de 7 KWh.

b) La consommation est maximale au sommet de la parabole, car elle est concave. On calcule donc les coordonnées du sommet :

$$-\frac{b}{2a} = \frac{-210}{-12} = 7,5 \text{ et } f(17,5) = 1844,5 \Rightarrow S(17,5; 1844,5)$$

La consommation maximale est atteinte après 17,5 minutes, soit à 14h02'30". Elle se monte à 1844,5 KWh.

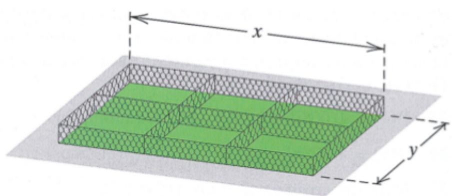
c) On cherche à résoudre $f(x) = 1000$.

$$\begin{aligned}
&-6x^2 + 210x + 7 = 1000 \\
&-6x^2 + 210x - 993 = 0 \\
&-2x^2 + 70x - 331 = 0 \\
&\Delta = 4900 - 2648 = 2252 \\
&x_1 = \frac{-70 + 47,5}{-4} \cong 5,64 \text{ et } x_2 = \frac{-70 - 46,5}{-4} \cong 29,36
\end{aligned}$$

L'expérience va durer environ 5,64 minutes.

Exercice 4.

Sur son terrain, un fermier veut clôturer une surface rectangulaire et diviser celle-ci en six lopins rectangulaires en placant deux barrières parallèles à l'un des côtés. Si le fermier ne dispose que de 1'000 m de barrière, quelles dimensions donneront la surface rectangulaire de plus grande aire ?



Soient x la longueur et y la largeur du terrain. On a $3x + 4y = 1000$, donc $y = 250 - \frac{3}{4}x$. On peut alors définir l'aire par la fonction

$$A(x) = x\left(250 - \frac{3}{4}x\right) = -\frac{3}{4}x^2 + 250x.$$

L'aire maximale se trouve au sommet de la parablole, car elle est concave, donc lorsque la longueur est égale à

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-250}{-\frac{6}{4}} = 250 \cdot \frac{4}{6} = \frac{1000}{6} = \frac{500}{3}.$$

Ainsi, l'aire est maximale si la longueur est égale à $x = \dfrac{500}{3} = 166,7$ mètres et la largeur est égale à $y = -\dfrac{3}{4} \cdot \left(\dfrac{500}{3}\right)^2 + 250 \cdot \dfrac{500}{3} = 125$ mètres.