GYMNASE DE BURIER

Chapitre 7 - Fonctions Quadratiques

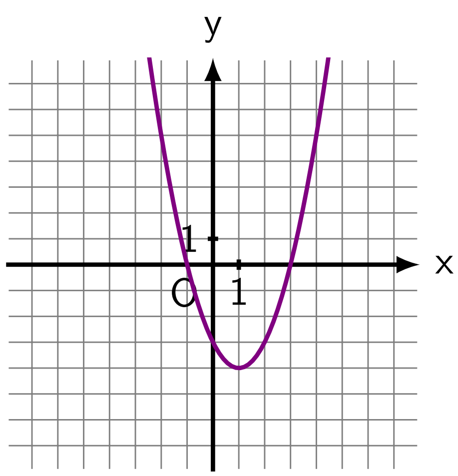
Sarah Dégallier Rochat

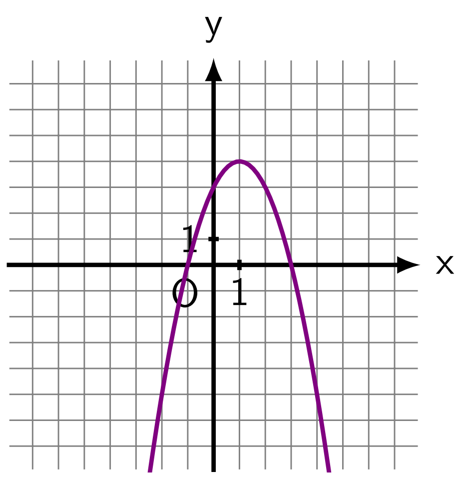
1. Fonctions quadratiques et paraboles

Une fonction quadratique est une fonction de la forme

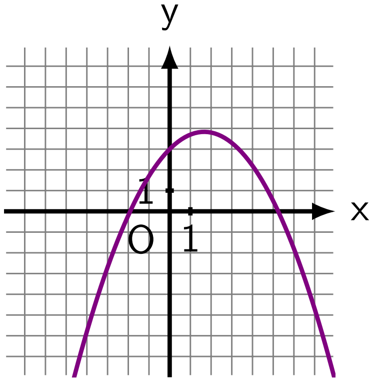
$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

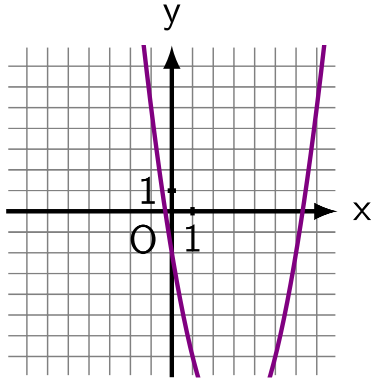
avec $a \neq 0$. La courbe représentative d'une fonction quadratique est une **parabole**.





Exercice 1.1 Les paraboles suivantes sont-elle convexes ou concaves ?





Exercice 1.2 Les fonctions suivantes sont-elles quadratiques ? Si oui, la parabole correspondante est-elle convexe ou concave ?

a) $-2x^2 + 5x - 21$

b) $4 - x^2$

c) $\dfrac{1}{5x^2 + 2x + 1}$

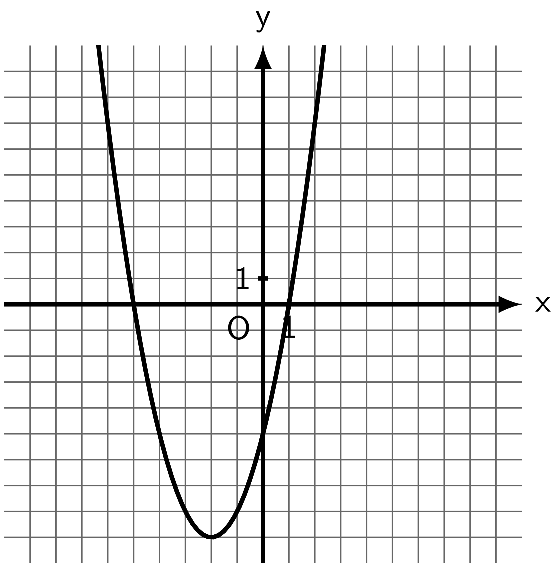
d) $3x + 1$

e) $3x + x^2$

f) $\sqrt{x^2 + 3x - 2}$

2. Points caractéristiques

Soit la parabole d'équation $y = x^2 + 4x - 5$. Ses points caractéristiques sont les suivants.



Soit $y = ax^2 + bx + c$ l'équation d'une parabole.

Coordonnées du sommet $\boxed{\mathcal{S} = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)}$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

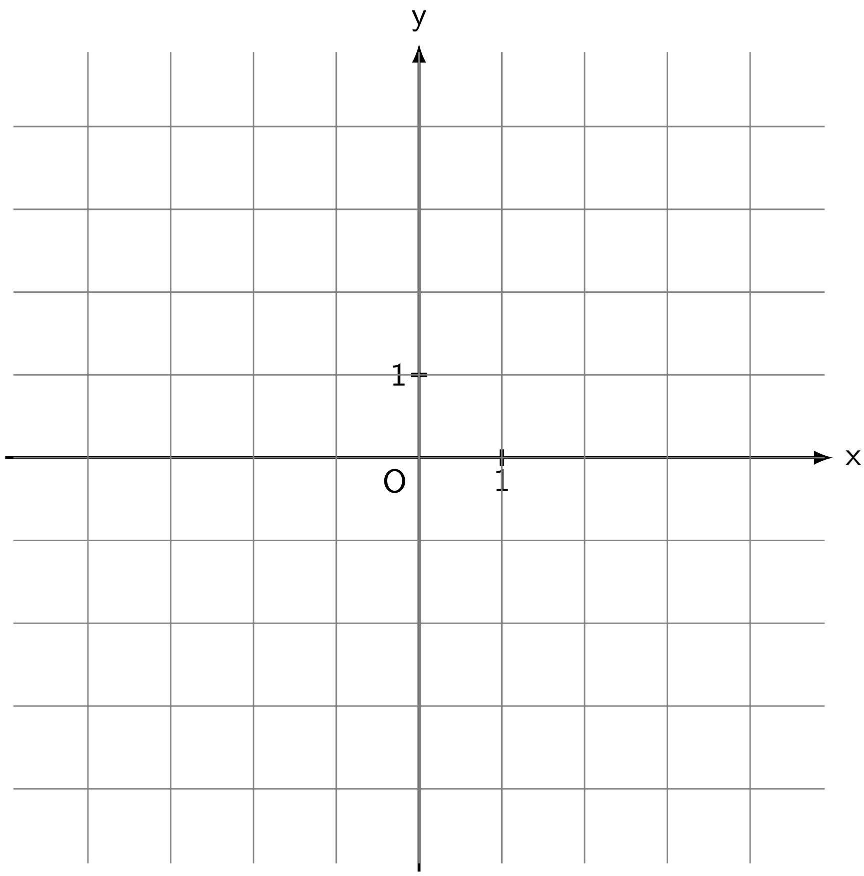
Equation de l'axe de symétrie $\boxed{x = -\frac{b}{2a}}$ (droite verticale passant par le sommet)

Exemple 2.1 Soit la parabole d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$.
Calculer les coordonnées du sommet et l'équation de l'axe de symétrie.

Exemple 2.2 Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction quadratique.
Calculer $f(0)$.

Ordonnée à l'origine $\boxed{\mathcal{H} = (0; c)}$

Exemple 2.1 (suite) Calculer l'ordonnée à l'origine de la parabole d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$. Placer ce point ainsi que le sommet et l'axe de symétrie sur le graphique.

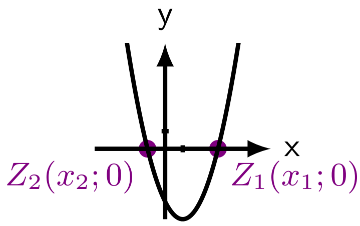


Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. Les zéros de la fonction $f(x)$ correspondent aux solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Zéros

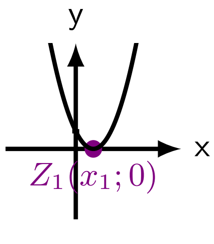
(1) Si $\boxed{\Delta > 0}$, il y a deux intersections :

$$Z_1\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};0\right) \text{ et } Z_2\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};0\right)$$

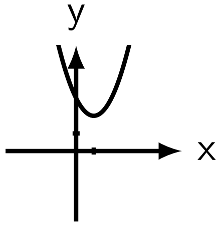


(2) Si $\boxed{\Delta = 0}$, il y a une seule intersection :

$$Z_1\left(\frac{-b}{2a};0\right)$$



(3) Si $\boxed{\Delta < 0}$, il n'y a pas intersections.



Exemple 2.1 (suite) Calculer les zéros de la fonction $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$. Compléter le graphique précédent.

Remarque 2.1 La première coordonnée du sommet $x_{\mathcal{S}}$ d'une parabole est toujours égale à la moyenne des premières coordonnées des zéros $x_{\mathcal{Z}_1}$ et $x_{\mathcal{Z}_2}$

$$x_{\mathcal{S}} = \frac{x_{\mathcal{Z}_1} + x_{\mathcal{Z}_2}}{2}$$

S'il n'y a qu'un zéro, on a $x_{\mathcal{S}} = x_{\mathcal{Z}}$.

Exemple 2.2 Dans l'exemple précédent, on avait

$$\mathcal{S}\left(-1; \frac{9}{2}\right), \quad \mathcal{Z}_1\,(-4; 0) \text{ et } \mathcal{Z}_2\,(2; 0)$$

Vérifier la formule de la remarque précédente.

3. Calcul avec les coordonnées

Rappel 3.1 Un point $(x; y)$ fait partie d'une courbe si ses coordonnées satisfont l'équation de cette courbe.

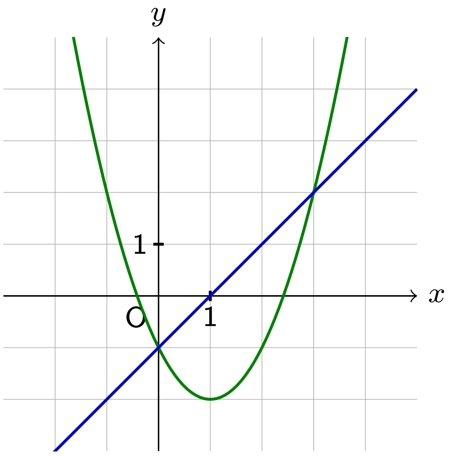
Exemple 3.1 Le point $(-2; 4)$ fait-il partie de la parabole $y = -2x^2 - 5x + 1$?

Rappel 3.2 On appelle zéro les valeurs telles que $f(x) = 0$.

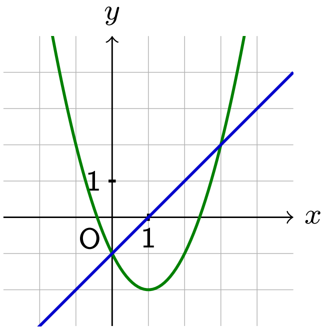
Exemple 3.2 Quels sont les zéros de la fonction $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$?

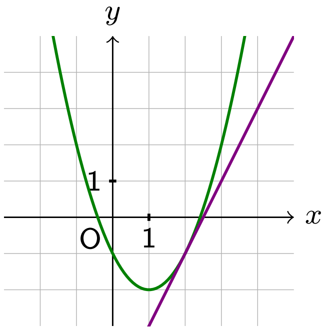
Intersection entre une droite et une parabole

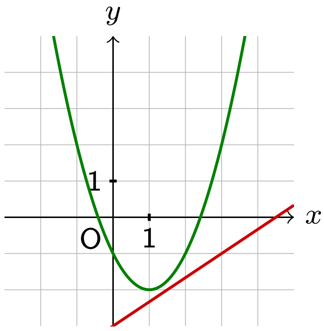
Exemple 3.3 Calculer les coordonnées des points d'intersection entre la parabole d'équation $y_f = x^2 - 2x - 1$ et la droite d'équation $y_g = x - 1$.



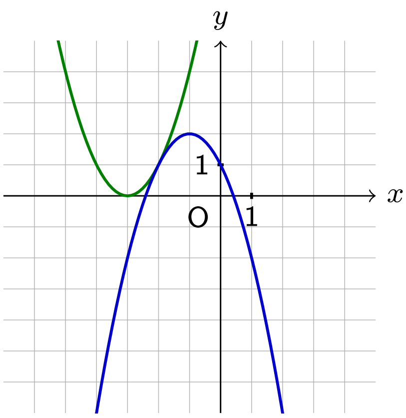
Lorsque que l'on cherche les points d'intersection entre une droite et une parabole, trois cas sont possibles :





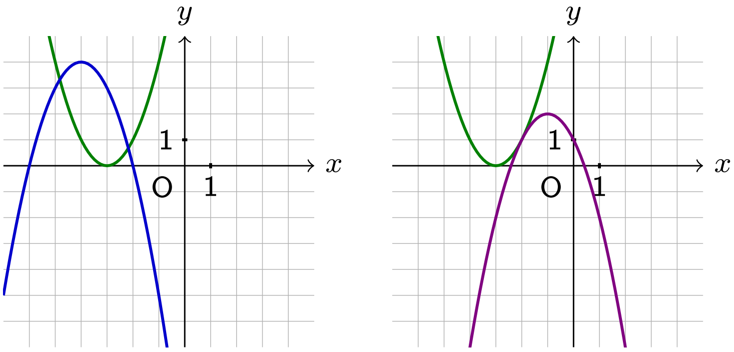


Intersection entre deux paraboles distinctes



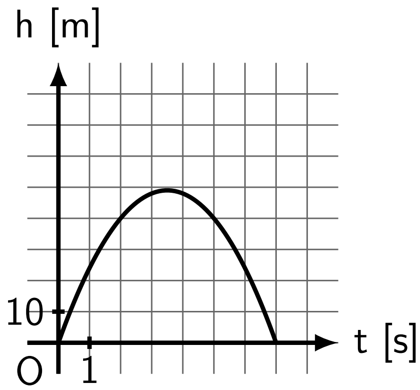
Exemple 3.4 Calculer les coordonnées des points d'intersection des paraboles d'équation $y_f = x^2 + 6x + 9$ et $y_g = -x^2 - 2x + 1$.

Lorsque l'on calcule l'intersection entre deux paraboles distinctes, trois cas sont possibles :



4. Application pratique

Exemple 4.1 Une balle est tirée en l'air à partir du sol. La hauteur h (en mètres) de la balle en fonction du temps t (en secondes) est donnée par $h(t) = -4t^2 + 28t$.

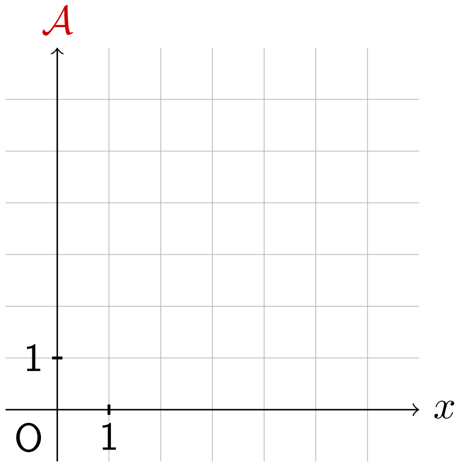


a) Calculer la hauteur maximale atteinte par la balle.

b) Calculer le temps que met la balle pour retomber au sol.

5. Optimisation

Exemple 5.1 Robert veut faire un parc rectangulaire pour son chien. Il a 10 mètres de barrière. De quelle taille doivent être la longueur L et la largeur x du parc pour maximiser son aire $\mathcal{A}$? Exprimer l'aire en fonction de x et tracer le graphe de la fonction.


$\mathcal{A}$
1
O
1
x