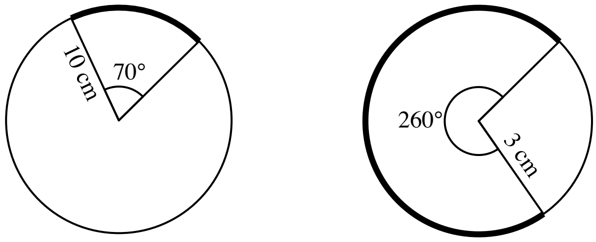
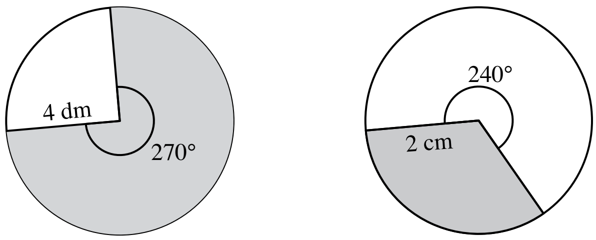
Thème 7: Trigonométrie I

7.1 Longueur d'un arc de cercle et l'aire d'un secteur circulaire

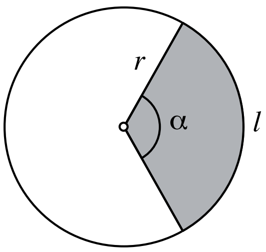
Exercice 7.1: **a)** Calculer les longueurs des arcs de cercle mis en gras :



b) Calculer la surface grisée :



Formule :



- La **longueur *l* d'un arc de cercle**, de rayon r, correspondant à un angle au centre de α est donné par :

$$l = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$$

- L'aire du secteur circulaire défini dans un cercle de rayon r, correspondant à un angle au centre de α est donné par :

$$A_{\text{sect}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$

Exercice 7.2: Un vendeur de pizza vend deux types de tranches :

- La petite: 4.- pour 1/6 d'une pizza de 18 cm de diamètre;
- La grande: 6.- pour 1/8 d'une pizza de 26 cm de diamètre.

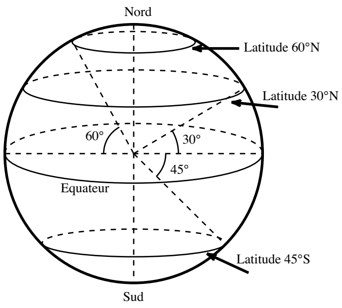
Quelle est la tranche admettant le meilleur rapport "quantité-prix"?

Exercice 7.3: **a)** Calculer le rayon d'un cercle pour lequel, à l'angle au centre $\alpha = 20°$, correspond un arc de 3 m.

b) Calculer l'angle au centre α dans un cercle de rayon 2 m pour que l'aire du secteur circulaire correspondant soit de 5 m^2.

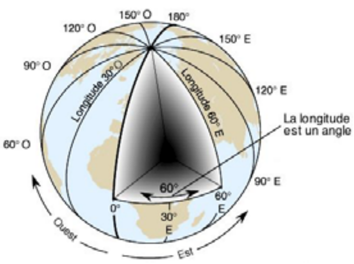
7.2 Comment être localisé sur la terre ?

Un peu de géographie : **La latitude** est une valeur angulaire, expression du positionnement nord-sud d'un point sur Terre, au nord ou au sud de l'équateur.



Un méridien est un grand cercle imaginaire tracé sur le globe terrestre passant par les pôles.

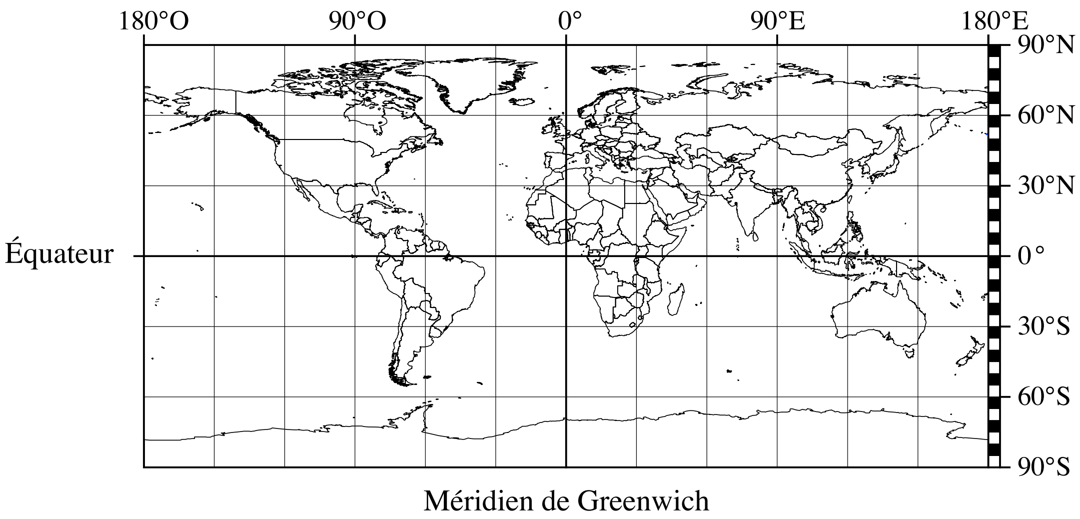
La longitude est une valeur angulaire, expression du positionnement est-ouest d'un point sur Terre. Tous les points de même longitude appartiennent au même méridien. À la différence de la latitude (position nord-sud) qui bénéficie de l'équateur et des pôles comme références, aucune référence naturelle n'existe pour la longitude. La longitude est donc une mesure angulaire sur 360° par rapport à un méridien de référence : **le méridien de Greenwich** avec une étendue de 180° Est à 180° Ouest.



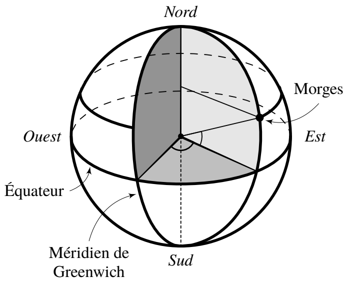
Le **degré**, unité de mesure d'angle, représente le 1/360 d'un tour complet. Pour mesurer des angles plus précis, on emploie des sous-unités. Le degré ayant été inventé par les Babyloniens, les sous-unités sont basées sur la numération babylonienne, en base 60 (Système sexagésimal). Ainsi, un degré est subdivisé en 60 **minutes d'arc** (symbole ', apostrophe), elles-mêmes divisées en **60 secondes d'arc** (symbole ", double apostrophe).

$$1' = 1°/60 = 0{,}0166...°$$
$$1'' = 1°/3600 = 0{,}000277...°$$

Par exple, Lausanne est à la latitude 46°31'N et longitude 6°39'E



Modèle 1 : • Morges se situe à la latitude 46,5167° N. Convertir cette valeur en degrés - minutes - secondes.



• La longitude de Morges est de 6°30' E. Convertir cette valeur en degré décimal.

Modèle 2 : Deux points distincts sur le même méridien terrestre ont des latitudes qui diffèrent de 1/60 degré *(c'est-à-dire 1 minute d'arc)*. Quelle est leur distance[1] sachant que le rayon de la terre est de 6'370 km ?

Exercice 7.4: Lausanne est à une latitude de 46°31' Nord. Calculer la distance, en suivant un méridien, entre Lausanne et l'équateur.

Page internet permettant de vérifier votre réponse : http://www.lexilogos.com/calcul_distances.htm

Exercice 7.5: Sion et Delémont se trouvent sur le même méridien terrestre. Leur distance « à vol d'oiseau » est de 123 km. Sachant que la latitude de Sion est 46°14' N, calculer la latitude de Delémont.

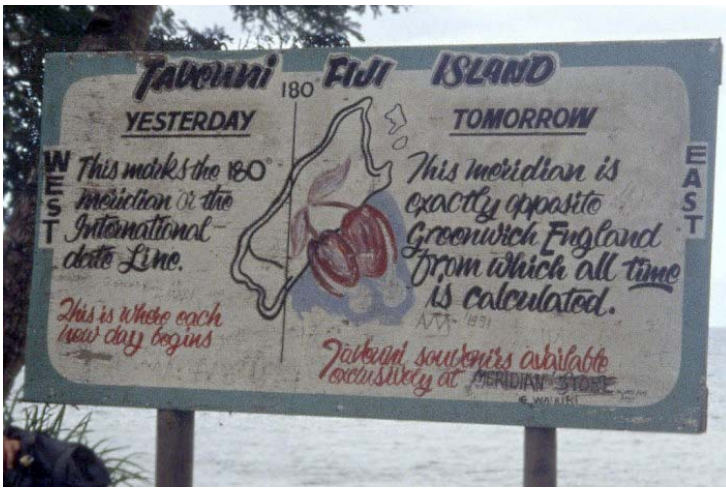
[1] Cette distance définit le mille marin.

Exercice 7.6: Dunkerque et Barcelone se trouvent sur le même méridien terrestre. Leurs latitudes respectives sont 49°45'N et 40°15'N. Calculer la distance « à vol d'oiseau » entre ces 2 villes[2].

Le problème de la détermination du méridien zéro :

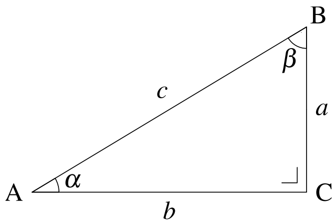
Il est intéressant de savoir que la détermination du méridien zéro ne s'est pas faite sans problème. Certains voulaient qu'il passe par Paris et d'autres par Londres. En 1871, un premier congrès de géographes et de scientifiques de toutes les nations se réunit pour parler du problème et le méridien de ***Greenwich*** *(observatoire royal de Londres) fut choisi pour les cartes marines. En 1875, un second congrès discuta du problème global. Les Français posèrent la condition que si le système métrique n'était pas accepté, ils n'accepteraient pas le méridien de Greenwich. Ce n'est qu'en* ***1884****, au congrès de Washington, que le méridien passant par Londres fut accepté par tous et les Anglais se préparèrent à se conformer au système métrique.*

Il subsista le problème du méridien 180° Est-Ouest (c'est le même!). En effet, c'est la ligne de partage du temps entre 2 jours. Alors quel jour est-il sur ce méridien ? Heureusement, ce
méridien passe essentiellement dans l'océan Pacifique. Il n'y a qu'une petite île des îles Fiji, ***Taveuni*** *qui se trouve sur la ligne de partage. On peut y lire un panneau : à gauche vous êtes hier et à droite vous êtes demain !*



7.3 Rappels dans le triangle rectangle

Notations :
- Les notations utilisées pour les triangles sont celles de la figure ci-dessous.



[2] La mesure de la distance entre Dunkerque et Barcelone s'est fait par triangulation entre 1792 et 1798. Elle a servi de base à la première définition du mètre comme la dix millionième partie du quart de méridien terrestre (1799).

Outils :

- La somme des angles d'un triangle vaut 180°, et donc dans un triangle ABC rectangle en C, on a :

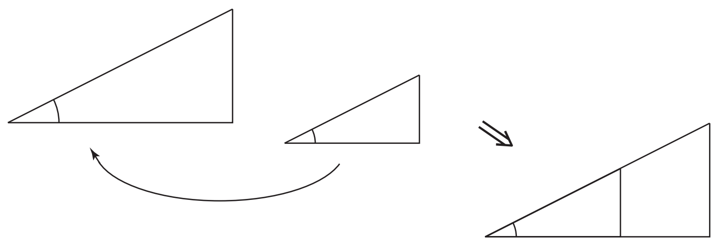
$$\boxed{\alpha + \beta = 90°}$$

- Le théorème de **Pythagore** affirme qu'un triangle ABC est rectangle en C si et seulement si :

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

7.4 Définition des rapports trigonométriques dans le triangle rectangle :

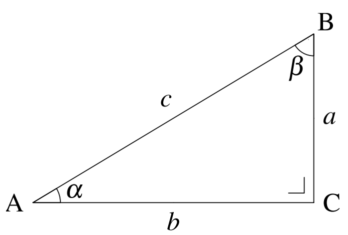
Rappelons que deux triangles rectangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle aigu égal. Les côtés correspondants sont alors proportionnels.



Le rapport des côtés dépend donc uniquement de l'angle aigu, ce qui permet de poser la définition des rapports trigonométriques.

Définitions : Soit un triangle ABC rectangle en C.

Les rapports trigonométriques de l'angle α sont définis de la façon suivante :



- $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{mesure du côté opposé à } \alpha}{\text{mesure de l'hypoténuse}} = \dfrac{a}{c}$, appelé **sinus de α**.

- $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{mesure du côté adjacent à } \alpha}{\text{mesure de l'hypoténuse}} = \dfrac{b}{c}$, appelé **cosinus de α**.

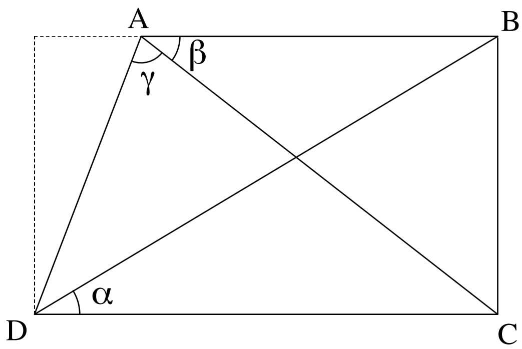
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{mesure du côté opposé à } \alpha}{\text{mesure du côté adjacent à } \alpha} = \dfrac{a}{b}$, appelé **tangente de α**.

Modèle 3 : *utilisation de la calculatrice :*

a) Calculer $\sin(73°) =$

b) Déterminer l'angle α pour lequel $\cos(\alpha) = 0{,}34$

Exercice 7.7: Cet exercice est à faire avec la plus grande précision dans les mesures. On considère le trapèze rectangle représenté ci-dessous :



a) À l'aide de mesures de longueur effectuées sur la figure donner les rapports $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$.

b) Mesurer l'angle α à l'aide d'un rapporteur, et calculer à la machine les rapports $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$. Comparer avec les valeurs obtenues en **a)**.

c) À l'aide de mesures de longueur effectuées sur la figure et votre calculatrice, déterminer les angles β, γ.

d) Mesurer au rapporteur les angles β, γ puis comparer avec les valeurs obtenues en **c)**.

Exercice 7.8: Compléter le tableau à l'aide d'une calculatrice :

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
19°			
	0,125		
		0,4	
			2

Exercice 7.9: Calculer dans chaque cas l'inconnue :

a) $\sin(27°) = \dfrac{3}{x}$

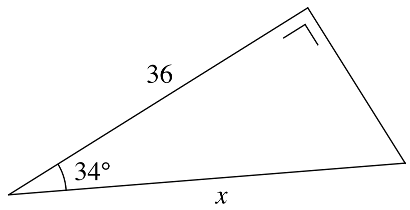
b) $\tan(\alpha) = \dfrac{8}{5}$

c) $\cos(79{,}5°) = \dfrac{a}{7}$

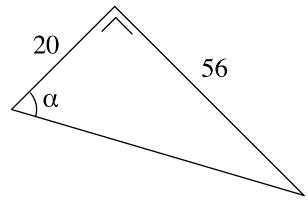
d) $\cos(\alpha) = \sin(50°)$

e) $\tan(24°) + \tan(x) = 1{,}35$

Exercice 7.10: Calculer l'élément inconnu dans chacune des figures :



a)



b)

Exercice 7.11: Un aviateur a volé 7 km à l'est pour rejoindre C depuis A. De C, il a volé 10 km au nord pour rejoindre B. De combien de degrés doit-il tourner pour retourner au point A ?

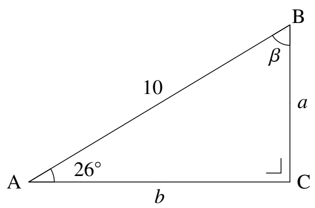
7.5 Résolution de triangles

Lorsqu'on demande de **résoudre** un triangle, on demande de calculer les côtés, les angles et l'aire du triangle.

Sauf mention du contraire, on donne les réponses avec une précision de 2 chiffres après la virgule : *2,32675 devient 2,33*

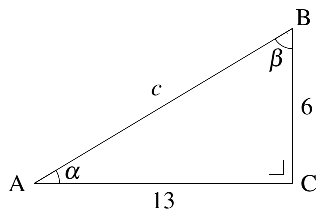
Modèle 4 : Résoudre le triangle

résolution d'un triangle rectangle:



Modèle 5 : Résoudre le triangle

résolution d'un triangle rectangle :

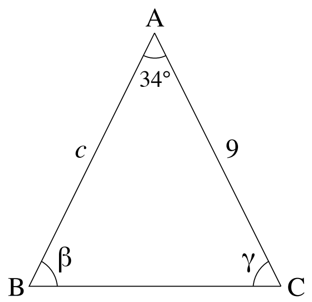


Exercice 7.12: Résoudre les triangles ABC, rectangles en C, connaissant :

a) $\alpha = 27°$; $a = 7{,}8$
b) $a = 63$; $c = 92$
c) $\beta = 40°$; $c = 480$
d) $b = 7$; aire = 12,5
e) $\alpha = 67{,}5°$; $b = 26{,}3$
f) $a = 13{,}4$; $b = 20$
g) $\beta = 39{,}4°$; $a = 32$
h) $a = 5$; aire = 6

Modèle 6 : Résoudre le triangle isocèle en A

résolution d'un triangle isocèle :



Exercice 7.13: Sachant que ABC est un triangle isocèle en A, compléter le tableau, où h_A et h_B désignent les hauteurs issues de A et B.

	α	β	a	b	h_A	h_B
a)			47		51	
b)			9,3			7,8
c)	65°			35		
d)		72°				5,6
e)		29°		17,5		
f)	38°		23,4			

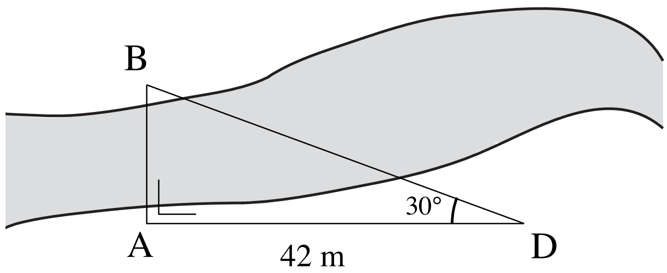
7.6 Problèmes d'applications

Modèle 7 : ***application :*** On veut assurer la stabilité d'un pylône à l'aide d'un câble d'acier fixé à une attache à 20 m du pied du pylône. Si l'angle d'élévation mesuré à partir du point d'attache est de 65°, trouver la hauteur du pylône, ainsi que la longueur du câble.

Exercice 7.14: Quelle est la hauteur d'un poteau qui donne 4 m d'ombre lorsque les rayons du soleil font un angle de 43° avec le sol ?

Exercice 7.15: Une échelle de 6 m est posée contre un mur vertical. Elle forme avec le sol horizontal un angle de 76°. À quelle hauteur touche-t-elle le mur ?

Exercice 7.16: Un géomètre a pris les relevés suivants pour déterminer sans avoir à traverser la rivière la longueur d'un pont devant joindre A et B. Quelle sera la longueur du pont ?



Modèle 8 : *application :* Les milieux des montants d'une échelle double sont reliés par une chaînette de 1,2 m de long. Calculer l'angle minimum déterminé par les montants de l'échelle avec le sol horizontal, si ceux-ci mesurent chacun 2,5 m.

Exercice 7.17: Un élastique est fixé horizontalement, légèrement tendu, entre les points A et C qui sont distants de 10 cm. On considère qu'il ne se déforme pas sous l'effet de son propre poids et qu'il est donc rectiligne. On suspend ensuite en B, au milieu de l'élastique, un objet qui a pour effet de l'allonger globalement de 6 cm. De quelle distance le point B descend-il sous l'effet du poids de l'objet ? Quel est l'angle entre les deux brins ?

Exercice 7.18: On donne cinq points A, B, C, D et E. Les points A, B, C et D sont alignés dans cet ordre et AE est perpendiculaire à AB. Sous quels angles voit-on les segments AB, BC et CD depuis E, si AE = 3 et AB = BC = CD = 2 ?

Exercice 7.19:
a) Calculer le périmètre des polygones à 5, 10, 1'000 côtés, réguliers inscrits dans un cercle de rayon R = 1dm.
b) Calculer l'aire du polygone à 1'000 côtés.
c) Les valeurs obtenues pour le polygone à 1'000 côtés étaient-elles prévisibles ?

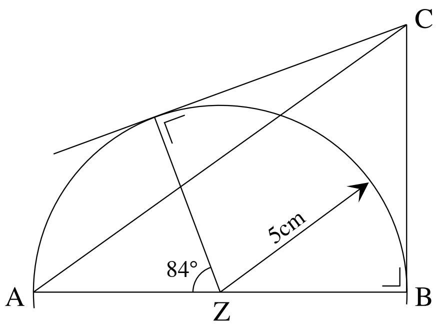
Exercice 7.20: Un losange ABCD est circonscrit à un cercle de rayon R = 4. Connaissant la diagonale AC = 15 du losange, calculer son côté, ses angles et sa diagonale BD.

Exercice 7.21: Un silo à fourrage cylindrique de 12 m de diamètre est vu sous un angle horizontal de 11°. À quelle distance du point le plus proche du silo se trouve-t-on ?

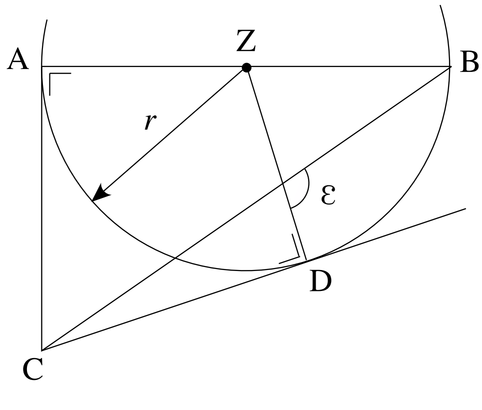
Exercice 7.22: Un observateur, placé à une hauteur de 135 m au-dessus du niveau de la mer, a trouvé que le rayon visuel aboutissant à l'horizon sensible faisait avec la verticale un angle de 89,65°. On demande de calculer, d'après cette mesure, le rayon terrestre.

Exercice 7.23: La voûte d'un tunnel est un arc de cercle dont l'angle au centre est égal à 230°. Sachant que la largeur de la base du tunnel est de 11 m, calculer le rayon de l'arc de cercle ainsi que la hauteur maximum de la voûte au-dessus du sol.

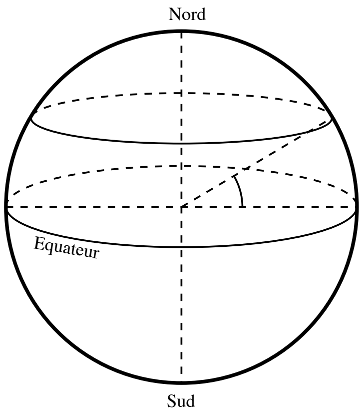
Exercice 7.24: Calculer la longueur du segment AC sur la figure.



Exercice 7.25: On donne $r = 10$, et AC = 12. Calculer l'angle ε.



Modèle 9 :



rayon de la terre = 6’370 km

- Depuis un point situé sur l’équateur, on se déplace toujours vers l’ouest. Après combien de kilomètres sera-t-on revenu au même point ?

- En se déplaçant toujours vers l'ouest dans l’hémisphère nord, c'est-à-dire en suivant un parallèle, on revient au point de départ après avoir parcouru 20’000 km. À quelle latitude se trouve-t-on et à quelle distance du pôle Nord ?

Exercice 7.26: Le Caire, ville d'Égypte a pour coordonnées: 40°E de longitude et 30°N de latitude. Bâton Rouge, ville de Louisiane aux États-Unis a pour coordonnées 90°O de longitude et 30°N de latitude.

a) Justifier que ces 2 villes sont situées sur un même parallèle.
b) Calculer une valeur approchée, arrondie au km, de la longueur L de ce parallèle.
c) En déduire une valeur approchée, arrondie au kilomètre, de la distance Le Caire – Bâton Rouge le long de ce parallèle

Exercice 7.27: Depuis un aéroport situé sur l’équateur, un hélicoptère décolle, parcourt 500 km vers l’ouest ; puis 500 km vers le nord suivi de 500 km vers l’est et finalement 500 km vers le sud avant d’atterrir.

a) Montrer que cet hélicoptère ne se retrouve pas à son point de départ, mais à l’est de celui-ci.
b) À combien de kilomètres de l’aéroport de départ se trouve-t-il ?

7.7 Relations fondamentales

3 relations à connaître : Pour tout angle aigu α, on a

$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$
$\tan(\alpha)=\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
$1+\tan^2(\alpha)=\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$

La notation $\sin^2(\alpha)$ signifie $(\sin(\alpha))^2$.

Modèle 10 : Rédiger la preuve de la relation $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$.

preuve de la 1ère relation :

Exercice 7.28: Prouver que les relations suivantes sont vraies pour tout angle aigu α.

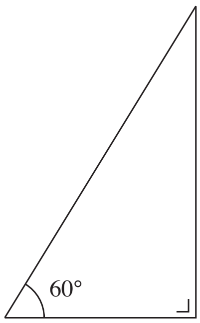
a) $\tan(\alpha)=\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

b) $1+\tan^2(\alpha)=\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$

7.8 Calculs de rapports trigonométriques pour quelques angles particuliers

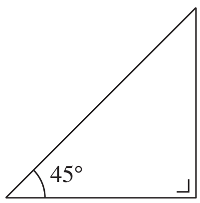
Il y a certains angles dont on peut facilement trouver les rapports trigonométriques en choisissant judicieusement le triangle rectangle dans lequel on les représente. Ce sont les angles de 30°, 45° et 60°.

Modèle 11 : Déterminer les rapports trigonométriques de l'angle 60°



Exercice 7.29: Déterminer les rapports trigonométriques de 30°

Exercice 7.30: Déterminer les rapports trigonométriques de 45° à l'aide de la figure suivante :



<u>Bibliographie et Ressources complémentaires:</u>

1) J-P. FAVRE, Mathématiques pour la maturité professionnelle, Digilex, 2016

2) P. FROMMENWILER, K. STUDER, “Algèbre et Analyse de données”, Cornelsen, 2014

3) P. FROMMENWILER, K. STUDER, “Géométrie”, Cornelsen, 2014

4) E.W. SWOKOWSKI et J. A. COLE, “Algèbre”, LEP, 1998

5) E.W. SWOKOWSKI et J. A. COLE, “Trigonométrie avec géom. analytique”, LEP, 1998

6) H. BOVET, “Algèbre”, POLYMATHS, 2002

<u>Sites WEB:</u>

1) Ce polycopié en format PDF et quelques animations:

www.javmath.ch

2) Fiches et exercices complémentaires à l'intention des élèves:

www.promath.ch