

## Thème 6: Équations du 2<sup>ème</sup> degré

**Introduction :** Une équation du second degré en  $x$  est une équation qui peut se ramener à la forme générale suivante:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec } a \neq 0$$

Lors de vos études, vous avez déjà dû résoudre des équations du 2<sup>ème</sup> degré. Il existe principalement 2 méthodes pour effectuer ceci :

- 1) méthode par **factorisation**;
- 2) méthode générale avec une **formule**.

### 6.1 Équation du 2<sup>ème</sup> degré (résolution à l'aide de la factorisation)

**Introduction :** La démarche permettant d'exprimer un polynôme comme produit de facteurs est appelée *la factorisation*.

$$(x + 7)(2x - 3) \quad 2x^2 + 11x - 21$$

On l'utilise pour résoudre rapidement des équations du 2<sup>ème</sup> degré. En effet, après factorisation, il suffira ensuite d'utiliser la *règle du produit nul* :

Le produit  $a \cdot b = 0$ , si et seulement si  $a = 0$  ou  $b = 0$ .

**Exercice 6.1:** On propose ci-dessous 5 équations sous leur forme développée (colonne de gauche) et factorisée (colonne de droite). Recréer les paires correspondantes :

a)  $x^2 - 16x = 0$       1)  $x(4x - 5) = 0$

b)  $x^2 + 19x + 18 = 0$       2)  $x(x - 16) = 0$

c)  $3x^2 - 5x + 2 = 0$       3)  $(x + 2)(x - 2) = 0$

d)  $4x^2 = 5x$       4)  $(x + 18)(x + 1) = 0$

e)  $x^2 = 4$       5)  $(3x - 2)(x - 1) = 0$

## 6.2 1<sup>ère</sup> méthode de résolution : mise en évidence d'un facteur $x$

**Modèle 1 :** Résoudre les 2 équations suivantes:

a)  $x^2 - 4x = 0$

b)  $-5x^2 = -15x$

**Exercice 6.2:** Résoudre les équations suivantes :

a)  $x^2 = 9x$

b)  $5x^2 + 25x = 0$

c)  $4x^2 = 5x$

d)  $15x^2 + 3x + 12 = 12$

## 6.3 2<sup>ème</sup> méthode de résolution : produits remarquables

**Formules :**

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

MAIS

$$a^2 + b^2 \text{ n'est pas factorisable}$$

**Modèle 2 :** Résoudre les 2 équations suivantes :

a)  $x^2 - 4x + 4 = 0$

b)  $-2x^2 + 18 = 0$

**Exercice 6.3:** Résoudre, si possible, les équations suivantes :

a)  $x^2 - 10x + 25 = 0$

b)  $x^2 = 25$

c)  $x^2 + 81 = -18x$

d)  $x^2 + 15x + 64 = 0$

e)  $9x^2 - 4 = 0$

f)  $x^2 = -20x - 100$

g)  $16x^2 + 25 = 0$

h)  $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$

## 6.4 3<sup>ème</sup> méthode de résolution : équation du type $x^2 + bx + c = 0$

**Exemple :** Effectuer le calcul suivant :

$$(x + 2)(x - 5) =$$

*Que peut-on dire du coefficient des  $x$  ?*

*Que peut-on dire au sujet du dernier terme ?*

Pour factoriser un trinôme unitaire de la forme  $x^2 + bx + c$

- on cherche 2 nombres dont la somme donne  $b$  et le produit  $c$  ;
- on exprime  $b$  comme somme de ces 2 nombres ;
- on effectue une double mise en évidence.

**Modèle 3 :** a) Factoriser  $x^2 + 7x + 10$ .  
 b) En déduire les solutions de  $x^2 + 7x + 10 = 0$ .

*factorisation d'un  
trinôme unitaire*

**Modèle 4 :** Résoudre  $x^2 - x - 20 = 0$

*factorisation d'un trinôme  
unitaire*

---

**Exercice 6.4:** Résoudre les équations suivantes :

- |                        |                          |
|------------------------|--------------------------|
| a) $x^2 + x - 56 = 0$  | b) $x^2 + 11x = -30$     |
| c) $x^2 + 42 = 13x$    | d) $x^2 - 2x - 35 = 0$   |
| e) $x^2 - 4x - 96 = 0$ | f) $x^2 = 8x - 16$       |
| g) $x^2 + 6x - 72 = 0$ | h) $x^2 + 3x = 28$       |
| i) $x^2 = -4x + 77$    | j) $2x^2 - 28x + 98 = 0$ |

## 6.5 4<sup>ème</sup> méthode de résolution : équation du type $ax^2 + bx + c = 0$

---

**Exemple :** Effectuer le calcul suivant :

$$(3x + 2)(2x - 5) =$$

*Que peut-on dire du coefficient des x ?*

*Que peut-on dire au sujet du produit des 2 autres coefficients ?*

---

Pour factoriser un trinôme non unitaire de la forme  $ax^2 + bx + c$

- on cherche deux nombres qui additionnés donnent  $b$  et qui multipliés donnent  $a \cdot c$  ;
- on exprime  $b$  comme somme de ces nombres ;
- on effectue une double mise en évidence ;

---

**Modèle 5 :** Factoriser  $3x^2 + 23x + 14$

*factorisation d'un  
trinôme non unitaire*

**Modèle 6 :** a) Factoriser  $30x^2 - 154x + 20$   
 b) En déduire les solutions de  $30x^2 - 154x + 20 = 0$

*factorisation d'un  
trinôme non unitaire*

---

**Exercice 6.5:** Résoudre les équations suivantes :

- |                                  |                             |
|----------------------------------|-----------------------------|
| a) $2x^2 + 9x - 35 = 0$          | b) $2x^2 - x = 21$          |
| c) $x^2 + x - 10 = -2x^2$        | d) $2(2x^2 - 12x) + 35 = 0$ |
| e) $6x^2 - x - 77 = 0$           | f) $3x^2 - x - 4 = 0$       |
| g) $3 \cdot (2x^2 - 1) - 7x = 0$ | h) $4x^2 - 2x - 15 = 2x$    |
| i) $6x^2 + 19x - 20 = 0$         | j) $7x^2 - 50x + 7 = 0$     |

## 6.6 Équation du 2<sup>ème</sup> degré (résolution à l'aide de la formule)

---

**Formule générale :** Les *solutions* de l'équation du 2<sup>ème</sup> degré mise sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sont données par :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

où  $\Delta = b^2 - 4ac$  (et s'appelle **le discriminant**)

---

**Modèle 7 :** Résoudre l'équation  $2x^2 - x - 3 = 0$

*réolution à l'aide  
de la formule générale*

---

**Modèle 8 :** Résoudre l'équation  $x^2 = 4x + 10$

*réolution à l'aide  
de la formule générale*

**Exercice 6.6:** Résoudre les équations suivantes :

- |                                |                                       |
|--------------------------------|---------------------------------------|
| <b>a)</b> $x^2 + 2x - 35 = 0$  | <b>b)</b> $2x^2 + 17x + 8 = 0$        |
| <b>c)</b> $x^2 + 5x - 414 = 0$ | <b>d)</b> $8x^2 - 10x - 63 = 0$       |
| <b>e)</b> $x^2 - 2x = 4x - 9$  | <b>f)</b> $x^2 + 10x = -x^2 - x + 21$ |

- 
- Remarques à propos du discriminant :**
- Si le  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ , l'équation admet **2** solutions.
  - Si le  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ , l'équation admet **1** solution que l'on appelle **solution double**.
  - Si le  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ , l'équation n'admet pas de solution réelle, car la  $\sqrt{\text{nombre négatif}}$  n'est pas définie.

**Exercice 6.7:** Résoudre les équations suivantes :

- |                                  |                              |
|----------------------------------|------------------------------|
| <b>a)</b> $x^2 - 4x + 1 = 0$     | <b>b)</b> $2x^2 - x = x + 1$ |
| <b>c)</b> $14x^2 - 11x - 60 = 0$ | <b>d)</b> $x^2 + 3x + 4 = 0$ |
| <b>e)</b> $6x^2 - 7x - 20 = 0$   | <b>f)</b> $x^2 - 4x - 1 = 2$ |

## 6.7 Modélisation

---

**Introduction :** Nous allons analyser des situations qui se décrivent à l'aide des équations du deuxième degré à une variable.

---

**Modèle 9 :** Une peinture et son cadre forment un rectangle de 90 cm par 120 cm. Sachant que l'aire du cadre est égale à l'aire de la toile peinte, trouver la largeur du cadre.

*modélisation d'une situation*

**Exercice 6.8:** Une peinture et son cadre forment un rectangle de 120 cm par 160 cm. Sachant que l'aire du cadre est égale à l'aire de la toile peinte, trouver la largeur du cadre.

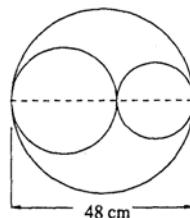
**Exercice 6.9:** Une page de 80 mm par 120 mm a une marge d'égale largeur partout. Sachant que le texte imprimé occupe les  $5/8$  de la page, trouver la largeur de la marge.

**Modèle 10 :** Le propriétaire d'une usine souhaite doubler la superficie de son usine en augmentant sa largeur et sa longueur du même nombre de mètres. Il demande de trouver la largeur des parties à construire pour respecter cette contrainte. L'immeuble mesure présentement 40 m par 60 m.

*modélisation d'une situation*

**Exercice 6.10:** La municipalité gère un parc de 240 mètres de long par 160 mètres de large et désire doubler sa superficie. Cet agrandissement devra se faire en conservant la forme rectangulaire. Pour ce faire, la municipalité envisage d'ajouter des bandes de terrain d'égales largeurs sur une longueur et une largeur du parc existant. Calculer la largeur de ces bandes de terrain.

**Exercice 6.11:** La somme des aires des deux cercles intérieurs de la figure suivante est égale au trois quarts de l'aire du cercle extérieur. Calculer le diamètre du petit cercle.



**Exercice Défi:** Trouver le rayon  $r$  du petit cercle :

