GYMNASE DE BURIER

Chapitre 5 - Factorisation

Sarah Dégallier Rochat

1.1 La factorisation

Définition 1.1 Un facteur est l'un des éléments constitutifs d'un produit.

Exemple 1.1

1. Dans l'expression $(x-2) \cdot (x+3)$, $x-2$ et $x+3$ sont des facteurs.
2. Dans l'expression $(x-2) + (x+3)$, $x-2$ et $x+3$ ne sont pas des facteurs.

Définition 1.2 On dit qu'un polynôme est factorisé s'il est écrit comme un produit de facteurs.

Exemple 1.2

1. Le polynôme $p(x) = 10 \cdot (x-5)^2 \cdot (x-2) \cdot (x+3)$ est factorisé.
2. Le polynôme $p(x) = 10 \cdot (x-5)^2 + (x-2) \cdot (x+3)$ n'est pas pas factorisé.

Exemple 1.3 Résoudre l'équation $3x - 2 = 0$.

Exercice 1.4 Résoudre l'équation $2x - 4 = 0$.

Exemple 1.5 Résoudre l'équation $(3x - 2) \cdot (2x - 4) = 0$.

Règle 1.1 Résoudre une équation du type

$$(3x-2)\cdot(2x-4)=0$$

revient donc à résoudre chacun des facteurs séparément :

$$\boxed{(3x-2)\cdot(2x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2=0 \\ 2x-4=0 \end{cases}}$$

et à grouper les solutions.

Exercice 1.2 Résoudre l'équation suivante :

$$10\cdot(x+10)\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(12-3x)=0$$

Exemple 1.6 Ecrire une équation dont les solutions sont 4, -5 et $\sqrt{3}$. Y a-t-il d'autres équations possibles ?

Exercice 1.3 Résoudre les équations suivantes.

1. $x - 7 = 0$
2. $4 \cdot (4x - 3) \cdot (x + 4)^2 = 0$
3. $x^2 \cdot (2 - 3x)^5 \cdot (x + 1) = 0$
4. $4x(1 - x) = 0$
5. $(x - 3)(x^2 + 2x + 1) = 0$

Définition 1.3 Un polynôme est factorisé au maximum si tous les facteurs le composant sont réduits et sont

1. de **degré 1** ; ou
2. de **degré 2 avec** $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

De plus, les termes ayant le même zéro sont groupés.

Exemple 1.3 Les polynômes suivants sont-ils factorisés au maximum ? Justifier dans le cas contraire.

1. $5(x+3)$
2. $(x+1)(x^2-4)$
3. $2(2+x+4)$

Exercice 1.4 Les polynômes suivants sont-ils factorisés au maximum ?

1. $3(x-2) - x(x-2)$
2. $5(x+2)(x+2)$
3. $5(x^2+4x+4)$
4. $5(x+2)^2$
5. $2(x^2+1)$
6. x^2-1

2. La mise en évidence (MEE)

On peut écrire n'importe quelle équation sous sa forme factorisée :

$$\underbrace{14x^3 + 28x^2 = 0}_{\text{forme non factorisée}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{14x^2(x+2) = 0}_{\text{forme factorisée}}$$

La factorisation nous permet de trouver les solutions d'une équation, ici $S = \{-2; 0\}$.

Nous allons voir différentes méthodes qui permettent de factoriser une équation. Pour commencer, nous allons entraîner la méthode de mise en évidence qui consiste à **identifier un facteur commun dans toutes les expressions de l'équation et à l'extraire.**

Exemple 2.1 Résoudre l'équation $x^2 - 5x = 0$

Nous allons nous concentrer sur la factorisation dans les exercices suivants.

Exemple 2.2 Factoriser le polynôme suivant $5 - 10x$.

Exercice 2.1 Factoriser le polynôme suivant $4x^2 - 2x$.

Exemple 2.3 Factoriser le polynôme suivant $(x+2y)\cdot x-(x+2y)$

Exercice 2.2 Factoriser le polynôme suivant $5(4x-2)-3(4x-2)$.

3. Les produits remarquables (PR)

Pour factoriser, nous pouvons utiliser les **produits remarquables**.

Produits remarquables du deuxième degré

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= A^2+2AB+B^2\\ (A-B)^2 &= A^2-2AB+B^2\\ (A+B)(A-B) &= A^2-B^2\end{aligned}$$

Produits remarquables du troisième degré

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= A^3+3A^2B+3AB^2+B^3\\ (A-B)^3 &= A^3-3A^2B+3AB^2-B^3\\ (A+B)(A^2-AB+B^2) &= A^3+B^3\\ (A-B)(A^2+AB+B^2) &= A^3-B^3\end{aligned}$$

Exemple 3.1 Factoriser le polynôme suivant $9x^2 + 12xy + 4y^2$.

Contre-exemple 3.1 Factoriser le polynôme $x^2 - 5x + 4$

<u>Exercice 3.1</u> Factoriser le polynôme suivant $x^2y^2 - 16z^2$.

<u>Exemple 3.2</u> Factoriser le polynôme $27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$.

Exercice 3.2 Factoriser le polynôme $125 + 8x^3$.

4. Méthode Somme-Produit (SP)

Exemple 4.1 Effectuer le calcul suivant

1. $(x+4)(x+3)$

   On remarque que : $\begin{cases} 7 = \\ 12 = \end{cases}$

2. $(x-4)(x+3)$

   On remarque que : $\begin{cases} -1 = \\ -12 = \end{cases}$

Propriété 4.1 Si $(x+d)(x+e) = x + bx + c$, alors

$$\boxed{\begin{cases} b = \\ c = \end{cases}}$$

Exemple 4.1 Factoriser le polynôme x^2+9x+8.

Exercice 4.1 Factoriser le polynôme $x^2-11x+24$.

5. La méthode du discriminant (Δ)

Pour factoriser un polynôme du type $ax^2 + bx + c$, on utilise la méthode du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions :
  $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et alors

  $$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

- Si $\Delta = 0$, il y a une seule solution : $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$ et alors

  $$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2}$$

- Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solutions et $ax^2 + bx + c$ n'est pas plus factorisable.

Exemple 5.1 Factoriser le polynôme $-x^2+5x-6$.

<u>Exercice 5.1</u> Factoriser le polynôme $4x^2+8x+4$.

6. Les bicarrés

Lorsque l'on a un polynôme du type $ax^4 + bx^2 + c$, on effectue le changement de variable $y = x^2$ pour le ramener à un polynôme du deuxième degré.

<u>Exemple 6.1</u> Factoriser le polynôme $x^4 - 5x^2 + 4$

7. La méthode du groupement

La méthode du groupement consiste à former des **groupes de termes** pour pouvoir les mettre en évidence ou appliquer des formules connues.

Exemple 6.1 Factoriser le polynôme $ax - ay + bx - by$

Exemple 6.2 Factoriser le polynôme $x^2 + 6x + 9 - 4y^2$

Exercice 7.1 Factoriser les polynômes suivants

1. $xy + 3y - x - 3$

2. $3x^3 + 2x + 6x^2 + 4$

3. $(x^2 - 8x + 16) - (x^2 + 4x + 4)$

8. Méthode de complétion

La méthode de complétion consiste à ajouter des termes **dont la somme vaut zéro** pour pouvoir utiliser un produit remarquable.

Exemple 8.1 Factoriser le polynôme suivant $x^4 + x^2 + 25$.

9. Résolution d'équations

On va utiliser les méthodes étudiées pour résoudre des équations.

Exemple 9.1 Résoudre l'équation $12x^3 - x^4 - 36x^2 = 0$.

Exercice 9.2 Résoudre l'équation $x^4 + x^3 - 27x - 27 = 0$.