Géométrie - Vecteurs et coordonnées

Gymnase de Burier

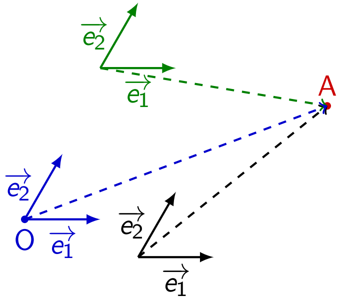
S. Rochat

1MSt

Chapitre 3 - Repères et coordonnées

1 - Repères dans le plan

Repère du plan



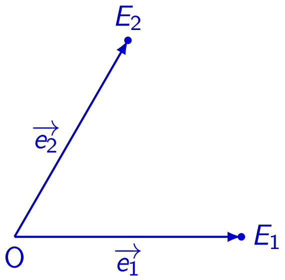
Soit $B = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ une base de V_2. Il y a une infinité de couples de flèches qui représentent la base.

Comment représenter un point A du plan ? La solution dépend de la base choisie !

Pour éviter cela, on associe à la base un point du plan, ici le point O, c'est-à-dire que l'on choisit les représentants qui partent de ce point.

On appelle le triplet $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ un repère du plan. Dans un repère, on peut représenter les vecteurs **et** les points.

Repère du plan

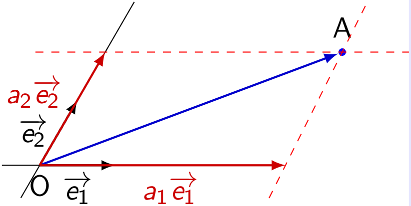


Définition

Un repère du plan $\mathcal{R}$ est formé d'un point O du plan, appelé origine, et d'une base associée $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$. On le note $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$.

On peut aussi définir un repère à l'aide de trois points non-alignés, par exemple, ici, $\mathcal{R} = (O; E_1; E_2)$.

Repère du plan

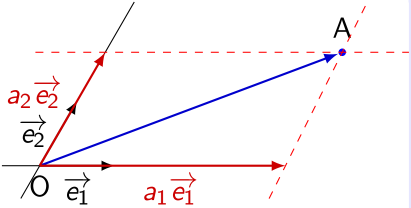


Définition

Les coordonnées d'un point A du plan relativement à un repère $\mathcal{R} = (O; e_1; e_2)$ sont les **composantes numériques** du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base associée $B = (e_1; e_2)$:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A(a_1; a_2)$$

Repère du plan



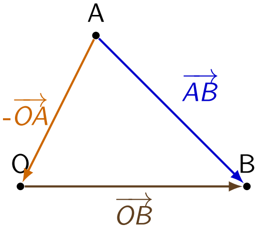
Définition

- a_1 est la première coordonnée ou abscisse du point A ;
- a_2 est la deuxième coordonnée ou ordonnée du point A ;
- $\overrightarrow{OA}$ est le rayon vecteur du point A.

2 - Calculs avec les coordonnées

Composantes d'un vecteur

Soit deux points $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$. Quelles sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$?



Par la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

De plus, $A(a_1; a_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

On a donc

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Théorème

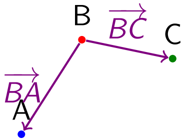
Soit deux points $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$. Les composantes numériques du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

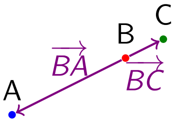
Alignement de points

On nous donne trois points A, B et C. Comment savoir si ces trois points sont alignés ?

1) Les points ne sont pas alignés



2) Les points sont alignés



Les vecteurs sont colinéaires !

Alignement de points

Exemple : Soit $A(0;2)$, $B(\frac{3}{2};\frac{11}{4})$ et $C(2,1)$. Ces trois points sont-ils alignés ?

Calculons les composantes de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 0 \\ \frac{11}{4} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Méthode A : Résolvons le système d'équations

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2 = k \cdot \frac{3}{2} & \Rightarrow k = \frac{4}{3} \\ 1 = k \cdot \frac{3}{4} & \Rightarrow k = \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

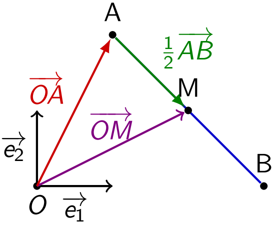
Méthode B : On utilise la formule croisée

$$2 \cdot \frac{3}{4} - 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

Les vecteurs sont colinéaires et donc les points alignés.

Milieu de segment

Soit deux points $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$. Quelles sont les coordonnées du milieu M du segment AB ?

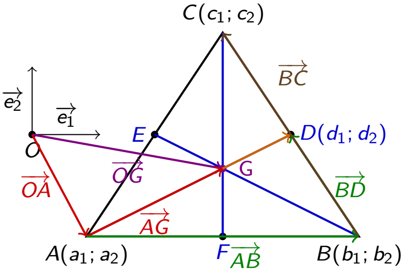


On cherche les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
On observe que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(b_1 - a_1) \\ \frac{1}{2}(b_2 - a_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 + \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}a_1 \\ a_2 + \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} \\ \frac{a_2+b_2}{2} \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad M\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle et D, E, F les centres des côtés.



On trace les trois médianes du triangle. L'intersection des médianes nous donne le centre de gravité G. Que valent les coordonnées de $G(g_1;g_2)$ (les composantes de $\overrightarrow{OG}$) ?

On sait que

- $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ (propriétés médianes)
- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$
- $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (propriétés médianes)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{6}\overrightarrow{BC} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)}$

Exemple

On considère les points $A(4;3)$, $B(5;1)$ et $C(-4;5)$.

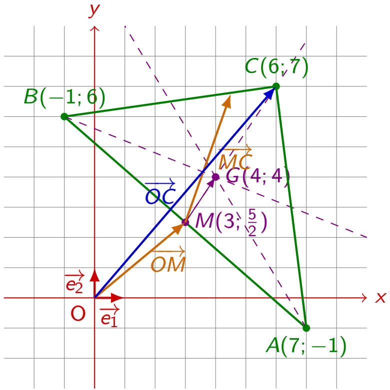
- Quelles sont les coordonnées du milieu I de AB ?

$$I\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right)=\left(\frac{4+5}{2};\frac{3+1}{2}\right)=\left(\frac{9}{2};2\right)$$

- Quelles sont les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC ?

$$G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)=\left(\frac{4+5-4}{3};\frac{3+1+5}{3}\right)=\left(\frac{5}{3};3\right)$$

D'un triangle ABC, on connait les sommets $A(7;-1)$, $B(-1;6)$ et le centre de gravité $G(4;4)$. Calculer les coordonnées du sommet C. **Indice** : Chercher la médiane issue de C.



La médiane cherchée passe par le centre de gravité G et le milieu $M(m_1; m_2)$ du segment AB.

M est donné par $M\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right)$:

$$M\left(\frac{7-1}{2}; \frac{-1+6}{2}\right) = M\left(3; \frac{5}{2}\right)$$

De plus, **les médianes se coupant dans un rapport** $\frac{1}{3}/\frac{2}{3}$, on a : $\boxed{\overrightarrow{MC} = 3 \cdot \overrightarrow{MG}}$

On peut donc trouver C en utilisant la médiane issue de C.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OM} + 3 \cdot \overrightarrow{MG} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} g_1 - m_1 \\ g_2 - m_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m_1 + 3 \cdot (g_1 - m_1) \\ m_2 + 3 \cdot (g_2 - m_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot g_1 - 2 \cdot m_1 \\ 3 \cdot g_2 - 2 \cdot m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 - 2 \cdot \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \quad C(6;7)
\end{aligned}$$