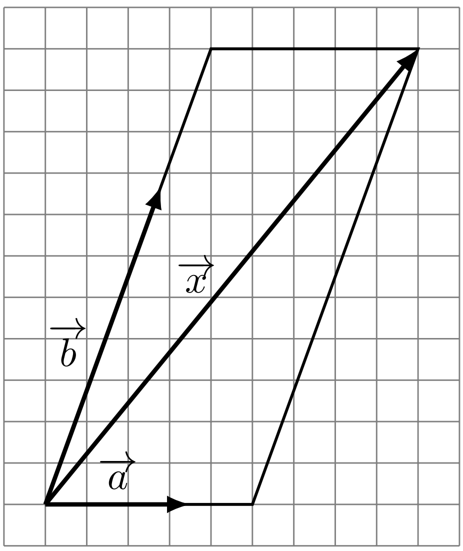
GYMNASE DE BURIER

Géométrie vectorielle

Chapitre 2 - Bases de vecteurs

Sarah Dégallier Rochat

1. Base de l'ensemble des vecteurs du plan



On peut décomposer le vecteur comme :

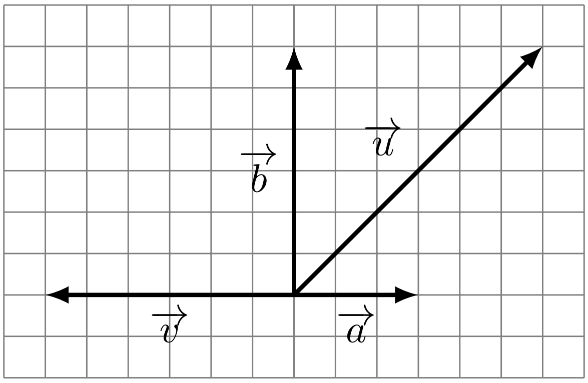
$$\overrightarrow{x} = \alpha \cdot \overrightarrow{a} + \beta \cdot \overrightarrow{b}$$

Dans la base $(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b})$, on écrit

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

où α, β sont les composantes linéaires de $\overrightarrow{x}$.

Exemple 1.1 Soit $(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b})$ une base. On cherche les composantes des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

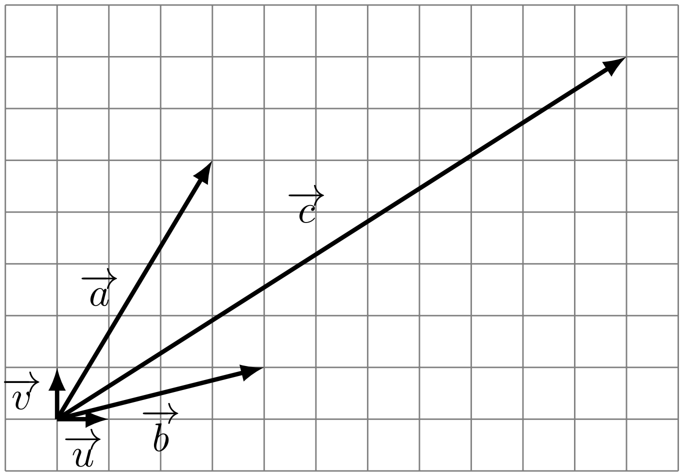


Application 1.1 Si $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \end{pmatrix}$, on peut calculer les composantes des vecteurs suivants.

1. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$
2. $7 \cdot \overrightarrow{a}$
3. $3 \cdot \overrightarrow{a} - 2 \cdot \overrightarrow{b}$

2. Changement de base

Exemple 2.1



Quelles sont les composantes de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ dans la base $(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$?

Quelles sont les composantes de $\overrightarrow{c}$ dans la base $(\overrightarrow{a}\,;\overrightarrow{b})$?

Exemple 2.2 Soit $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$ trois vecteurs donnés dans une base $(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$. Quelles sont les composantes de $\overrightarrow{c}$ dans la base $(\overrightarrow{a}\,;\overrightarrow{b})$?

3. Vecteurs colinéaires

Rappel 3.1 Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction :

$$\boxed{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \text{ sont colinéaires } \Leftrightarrow \text{Il existe k tel que } \overrightarrow{a} = k \cdot \overrightarrow{b}}$$

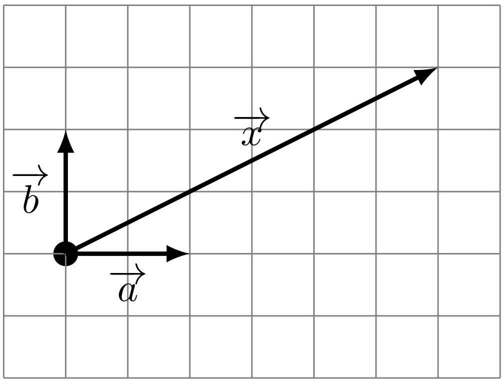
Exemple 3.1 Les couples de vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

1. $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ -18 \end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \end{pmatrix}$

4. Condition pour que des vecteurs forment une base

Propriété 4.1 Deux vecteurs peuvent former une base s'ils ne sont pas colinéaires.



Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ ne sont pas colinéaires : on peut exprimer n'importe quel vecteur du plan

$$\overrightarrow{x} = \alpha \cdot \overrightarrow{a} + \beta \cdot \overrightarrow{b}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ sont colinéaires : on ne peut exprimer que des vecteurs de même direction.

Exemple 4.1 Les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ peuvent-ils former une base ?