Secteur des mathématiques

Ch. de Pinchat 22
1227 Carouge

(☎ 022 309 35 50)

Anne AUDEOUD
Jean-Pierre BUGNON
Muriel CORTHÉSY

02 CE 01

"DEUX ET DEUX FONT QUATRE..."

Réédition partielle du document n°48 publié en 1994 par le Service de la recherche pédagogique, sous la direction de M. Raymond Hutin

Novembre 2002

TABLE DES MATIERES

	Pages
Préambule	3
LES ACTIVITES QUELQUES EXEMPLES	5
Introduction	7
Quelques exemples d'activités	10
Construction de labyrinthes	11
Activité des pavages	17
Emboîtement de cubes	20
Les polyominos	26
LES PROBLEMES QUELQUES EXEMPLES	31
Des problèmes pour le cycle élémentaire !	33
Etude de réseaux	36
Les interactions et communications entre élèves	45
Les partages	46
Contraintes et variables	58
Classifications et raisonnement logique	60

PREAMBULE

L'ouvrage publié en 1994 par le Service de la Recherche Pédagogique étant épuisé, il nous a paru nécessaire de réactualiser son contenu pour le diffuser aux personnes qui ne le possèdent pas. Le présent document n'en reprend que certaines parties, celles qui décrivent les activités pour les degrés 1E à 3P. Concernant les aspects mathématiques ou didactiques, on se référera à la publication "Apprentissage et enseignement des mathématiques - Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement", document édité par COROME et distribué avec les moyens d'enseignement.

Les modifications apportées à la description des activités étant mineures, les personnes qui possèdent l'édition originale peuvent encore l'utiliser. Les cartes pour les problèmes de logique "Les musiciens" n'étant plus disponibles, nous proposons dans la présente édition une adaptation des activités afin qu'elles soient réalisables avec les cartes "Sorcières" et "Pirates" des moyens d'enseignement 1P et 2P.

Le document en annexe contient les quadrillages nécessaires pour les activités "Les robots" et "Les pentominos", ainsi que les labyrinthes pour les "Etudes de réseaux", de 1 à 21 pour la première activité et de A1 à G2 pour la deuxième. Il se présente sous la forme d'une brochure dont les pages sont détachables pour être photocopiées.

Afin de faciliter la lecture, nous avons choisi d'employer systématiquement le terme "enseignante", celui-ci correspondant à la grande majorité des destinataires.

LES ACTIVITES

Quelques exemples

ANNE AUDEOUD et EDDA GASSER

INTRODUCTION

> *"L'activité de l'enfant s'exerce d'abord dans l'espace, où se trouvent les objets et les personnes. L'enfant y opère des repérages et des transformations. Il s'y déplace et change ainsi son système de repérage; il déplace des objets et transforme ainsi le monde extérieur. Il y suit des chemins et en dessine des représentations; il l'organise." (G. Vergnaud).*

Lorsque l'enfant entre à l'école publique, en général à quatre ans, il dispose déjà de toute une expérience vécue durant la prime enfance. Cette expérience est fort diverse; certains enfants ont déjà fréquenté la crèche ou le jardin d'enfants où ils ont acquis un certain degré d'autonomie et de socialisation tandis que d'autres sont restés davantage dans le cercle familial. La diversité des vécus et des expériences antérieurs, ainsi que celle des connaissances élaborées, se traduit, entre autres, par une grande dispersion des niveaux de langage; et l'on n'est pas toujours assez attentif au fait que les mêmes mots peuvent recouvrir des choses très différentes.

Les activités qui sont proposées dans les pages suivantes poursuivent un double but. D'une part, elles visent à élargir le champ d'expérience de l'élève, à lui donner des occasions de se confronter à un matériel plus structuré que ce qu'il connaît déjà. Elles demandent aussi que l'élève focalise son attention sur une situation précise pour l'explorer complètement. D'autre part, grâce aux échanges entre élèves qu'elles induisent, elles contribuent à la confrontation des expériences individuelles, à l'émergence des bases d'un usage social du langage pour confronter des points de vue différents, à l'adoption progressive d'un langage commun.

Ces activités vont donc bien au-delà de la simple acquisition de quelques notions élémentaires de mathématiques. C'est véritablement les prémisses du raisonnement logique ou logico-mathématique qui se construisent dans ce travail tantôt libre, tantôt semi-dirigé par l'enseignante. D'où la grande attention qu'il convient d'apporter au choix des matériels utilisés qui doivent être suffisamment riches et ouverts afin de permettre toutes sortes d'explorations parallèles.

Rappelons ici que l'enfant, au cours de son développement, passe progressivement de l'indifférencié au différencié. Ce n'est que peu à peu qu'il existe comme individu propre, capable d'initiatives et d'actions, apte à tester les résultats de ses actions sur son entourage et d'en tirer des enseignements. L'enfant agit, se déplace, se sent successivement voiture, avion, chat, etc. Mais très tôt aussi, il va être capable de se distinguer de ce qui l'entoure pour «faire agir» les objets, les jouets dont il dispose.

Pour ne citer qu'un exemple de cette progression, la plupart des enfants sont capables de se déplacer, sur ordre, à gauche ou à droite bien avant de pouvoir faire circuler une petite voiture vers la gauche ou vers la droite lorsque cette voiture n'est pas parallèle à leur propre position.
Dans toute cette progression, le comportement moteur joue un rôle très important. Ce qui est agi, vécu, ressenti au plan moteur est intégré au plan mental. Ne nous y trompons pas cependant : ce n'est pas parce que l'enfant agit qu'il se développe, mais bien parce qu'il réfléchit sur ce qu'il agit. On a trop souvent pensé qu'il suffisait de placer les élèves dans des situations où ils avaient la possibilité d'agir et de manipuler des matériels divers pour

qu'ils se développent spontanément. Ce n'est que très partiellement vrai. En fait, c'est grâce aux "questions" qu'ils se posent et aux défis qu'ils se donnent, c'est à travers les échanges verbaux au sujet de ce qu'ils sont en train de faire, que leur réflexion mûrit et s'enrichit. Certains enfants, très spontanément curieux, sont capables par eux-mêmes d'engager des activités intellectuellement très riches à partir de n'importe quel objet. D'autres, en revanche, sont moins actifs dans ce domaine et c'est à eux, surtout, que l'enseignante peut apporter beaucoup en les encourageant à la recherche, en leur proposant des défis, en sollicitant leur réflexion, en demandant des vérifications, des explications, des preuves.

C'est en cela que, dès le début de la scolarité et sous des formes appropriées, sont présents les éléments fondamentaux qui, depuis Aristote, constituent les bases de notre civilisation et de notre culture, à savoir l'esprit d'observation, d'abstraction, d'induction, de démonstration, de discernement. Observer, abstraire (c'est-à-dire, à l'âge qui nous occupe, ne retenir dans le matériel que les propriétés pertinentes pour une activité donnée), induire (soit, à la suite de plusieurs expériences voisines, dégager des concordances et des ressemblances), démontrer (fournir la preuve que ce qu'on affirme est vrai, et parfois établir une règle généralisable, par exemple 3 + 2 feront toujours 5, quels que soient les objets utilisés), exercer son esprit critique en ne se contentant pas d'une observation superficielle mais en cherchant exemples et contre-exemples : tous ces éléments font partie intégrante de l'action éducative dès les premiers jours de la scolarité.

Dans cette perspective, la dimension mathématique apparaît comme s'inscrivant dès ses origines dans la dynamique d'un sujet tentant de comprendre et de maîtriser le monde qui l'entoure et qui, pour ce faire, tend à l'élaboration de systèmes cohérents auxquels il s'efforce d'intégrer, dans la mesure de ses moyens, les relations qu'il a perçues ou élaborées. Dans l'utilisation et l'exploration de l'objet, l'activité logico-mathématique se révèle de plus en plus dépouillée, précise, complète. L'élève au travers de ses intuitions mathématiques s'intéresse aux diverses caractéristiques des objets et porte de l'intérêt aux formes, aux dimensions, aux couleurs, aux positions, aux champs d'utilisation, au nombre.

Pour ce qui a trait plus particulièrement au nombre, le fait que les élèves soient capables de dénombrer (c'est-à-dire connaissent la comptine des nombres et puissent s'en servir pour dénombrer des collections) ne permet pas de dire qu'ils savent ce qu'est un nombre. Mais l'élève qui ne maîtrise pas, en temps utile, la suite numérique rencontre des difficultés dans les tâches de dénombrement, puis de comparaison de collections; ces difficultés peuvent ensuite perturber sa progression.

Le rôle de l'enseignante consiste à choisir des activités qui permettent aux élèves d'affiner leur connaissance de la suite des nombres, en s'appuyant sur les compétences réelles de chacun, en tenant compte des pratiques déjà maîtrisées par les élèves pour les enrichir et les développer.

Il est très important aussi de faire en sorte que la participation de chaque élève soit complète, que l'intérêt soit soutenu tout au long des activités, et surtout que chaque élève ait la possibilité de créer, d'inventer, de chercher. Si l'on n'y prend pas garde, un certain nombre d'entre eux peuvent en être réduits à toujours copier ce que des camarades plus rapides ou plus précoces ont déjà fait. Ils sont ainsi privés de ce qui fait l'essentiel de l'apprentissage des mathématiques : l'entrée personnelle dans un processus de recherche et d'organisation des données.

Il s'agit encore d'offrir aux élèves des activités qui ont un sens pour eux, afin qu'ils ne ressentent pas l'école comme un monde hors de leur vie. Ceci ne signifie pas que l'on s'en tienne exclusivement à des problèmes de la vie courante dont la plupart sont souvent très complexes, mais que l'on s'assure que les réflexions des élèves s'ancrent dans un terrain connu.

Mathématiser, en division élémentaire, c'est permettre à chaque élève, à partir de sa propre activité, d'entrer progressivement dans un processus d'abstraction.

QUELQUES EXEMPLES D'ACTIVITES

Dans la division élémentaire, les occasions d'aborder les premières notions mathématiques sont très nombreuses. Elles apparaissent dans la plupart des situations d'apprentissage auxquelles sont confrontés les élèves.

Qu'il s'agisse d'exploiter des éléments rencontrés au cours d'une promenade, d'utiliser la salle de jeux, d'organiser la classe, de vivre une journée d'école, d'observer des affiches ou des images, de raconter des histoires, partout, la dimension mathématique prise au sens large est présente.

Cet apprentissage occasionnel, non structuré, contribue à nourrir la réflexion de l'élève et lui permet de multiplier les expériences au cours desquelles il rencontre des notions mathématiques. Il est utile pourtant de lui proposer à divers moments des activités plus résolument pensées dans le but d'organiser et de structurer certains éléments de connaissance. Celles qui sont présentées dans les pages qui suivent ne doivent pas être considérées comme des modèles à faire absolument, mais bien comme des exemples de ce qu'il est possible de réaliser à différents moments de la scolarité. Dans la plupart des cas, l'indication du degré concerné n'est donnée qu'à titre indicatif. En effet, une bonne activité mathématique doit être suffisamment large pour que chaque élève, quel que soit son niveau de développement et son champ d'expérience antérieur, y trouve la possibilité d'un travail fructueux.

CONSTRUCTION DE LABYRINTHES

L'approche topologique de l'espace[1], c'est-à-dire l'établissement d'un réseau de relations spatiales indépendantes de toute notion de mesure, touche principalement, en division élémentaire, des relations mettant en jeu les notions de continu et de discontinu, de voisinage, de domaine et frontière, d'ouverture et de fermeture, d'intérieur et d'extérieur, de disjoint et d'un seul tenant, etc.

Les frontières, marquées par des lignes ou délimitées par des surfaces, sont parmi les premières acquisitions spatiales de l'élève. Elles participent à la prise de conscience de la forme des objets, à la construction de leur image, ainsi qu'à la construction, par la mise en place de repères destinés notamment à préciser les échanges verbaux, de l'espace vécu ou de l'espace représenté sur le papier.

La maîtrise précoce d'un vocabulaire de position (dedans, dehors, près de, devant, derrière, entre, à gauche, à droite, etc) et d'un vocabulaire temporel (avant, après, etc) constitue un atout précieux pour que l'élève profite pleinement de ce qu'il rencontre en classe. En outre, les premiers éléments de topologie prennent une place importante dans l'exploration de l'écrit, notamment en ce qui concerne la compréhension de toutes sortes d'informations présentées sous forme de schémas.

Le thème du labyrinthe, qui passionne l'humanité depuis toujours, intéresse les enfants aussi bien que les adultes. Il se prête à de multiples exploitations en division élémentaire. Le labyrinthe est défini comme un réseau compliqué dont la recherche de l'issue pose problème. Cela demande une adaptation constante, exige des stratégies organisées de déplacements à partir de choix successifs entre diverses possibilités, une capacité d'anticiper mentalement un trajet avant de le réaliser. La recherche de l'issue implique une exploration raisonnée de l'espace, la saisie de son organisation, la recherche de moyens pour s'y orienter.

Si l'on propose aux élèves, en groupes, de construire eux-mêmes des labyrinthes, ils seront amenés à surmonter d'autres difficultés :

- confrontation entre eux, nécessité d'une concertation qui se fera progressivement par un échange de communications. Il est en effet indispensable de tenir compte du point de vue des autres membres du groupe, si l'on veut que le labyrinthe forme un tout plutôt qu'un assemblage composé pratiquement d'autant de fragments de labyrinthe que d'élèves présents.
- organisation de l'espace : il faut veiller à ce que l'on puisse y évoluer de manière "intéressante", c'est-à-dire qu'il y ait des entrées et des sorties, que l'intérieur soit meublé convenablement, avec une série de difficultés qui le rendent difficilement réalisable sans pour autant décourager les élèves qui le parcourent.

Les "murs" doivent avoir une hauteur suffisante pour ne pas inciter les élèves à les enjamber, mais il faut en même temps qu'ils puissent dominer la situation d'une vision globale au moment où ils voudront se repérer, rectifier leur construction, puis leur direction.

[1] que nous nous garderons bien d'assimiler à la topologie, branche particulière des mathématiques

C'est pourquoi il est proposé de tirer parti d'emballages en carton en forme de briques. Il est très important que l'élève évolue d'abord lui-même dans un labyrinthe construit à sa taille.

Un autre aspect de l'activité consiste à utiliser des bandelettes sur le sol ou sur un espace restreint. Ce n'est alors plus l'élève lui-même qui se déplace dans le labyrinthe; il prend donc une certaine distance, guide ensuite un objet sur un itinéraire de son choix. Le travail dans un champ restreint, offre une vision d'ensemble de la construction, ce qui permet de procéder plus facilement par anticipation visuelle. Mais cela ne veut pas dire pour autant qu'il n'y aura plus de tâtonnements.

De cas en cas, on peut inviter les élèves à travailler sur des labyrinthes présentés sous forme de fiches posant divers problèmes. Il faut toutefois être prudent afin que les exercices proposés suscitent une réelle activité de réflexion.

CONSTRUCTION DE LABYRINTHES	
Degrés	1E, 2E, 1P, 2P
Matériel	<u>Briques</u> Environ 50 "briques" en carton <u>Pailles</u> Un grand nombre de chalumeaux Plaques de sagex et clous en U ou feuilles java et scotch <u>Bandelettes</u> Des bandes de papier de 2 à 4 cm de largeur
Aire de travail	<u>Briques</u> : minimum 8 m^2 <u>Pailles ou bandelettes</u> : A4 (individuel) ou A3 (groupe), posé sur la table ou sur le sol
Consigne	Construisez un labyrinthe avec le matériel à disposition.
Contenu mathématique	Notion de réseau Relation d'ordre
Quelques démarches possibles des élèves	Création du labyrinthe au moyen de chemins et/ou de murs Création de carrefours Création de chemins équivalents Création d'un labyrinthe connexe[2] ou non connexe Construction au coup par coup Construction planifiée prenant en compte l'existence d'entrées et de sorties

[2] "Un réseau est connexe s'il est possible d'aller d'un point quelconque du réseau à un autre en suivant une ligne du réseau." Burdet C.; **Mathématique de notre temps**; Payot; Lausanne; 1975.

LES BRIQUES

Le dispositif

Travail en salle de jeu avec l'ensemble de la classe.
Travail de quatre à six élèves dans un coin de la classe réservé à cet effet (environ 8 m2).

La consigne

Elle est toujours orale. En cas de besoin, elle est répétée ultérieurement.

"Construisez un grand labyrinthe avec le matériel à disposition."

Le matériel

Une cinquantaine de "briques" type briques à lait.

L'activité

La richesse et l'intérêt de l'exécution du labyrinthe sont liés à l'expérience antérieure de chacun, enrichie par les interactions entre élèves. Selon leur niveau de développement dans ce domaine, l'exécution en sera plus ou moins élaborée; ils vont parfois construire le tour du labyrinthe sans nécessairement penser à une entrée et à une sortie. L'enseignante intervient en faisant remarquer qu'elle ne peut pas y entrer, ce qui les engagera à prévoir une ouverture, puis à organiser ou réorganiser l'intérieur en conséquence.

D'autres élèves, probablement, placeront plusieurs chemins sans lien ou organiseront des groupes de briques pour meubler l'espace sans que la notion de labyrinthe soit réellement présente. Dans ce cas, l'enseignante intervient en leur demandant :

"Comment pouvez-vous passer d'un chemin à l'autre ?"

Puis :

"Pouvez-vous relier les différents chemins en prévoyant des carrefours ?"

Peu à peu le labyrinthe s'organise et la nécessité d'une sortie se fera sentir. Elle pourra être la même que l'entrée, se présenter à proximité de celle-ci ou carrément à l'opposé.

Après plusieurs tentatives de réajustement, les élèves se rendront compte que, pour que le labyrinthe soit intéressant, il devrait comporter plusieurs chemins sans issue, éventuellement des parties inaccessibles ou des voies qui créent des problèmes.

LES CHALUMEAUX

Le dispositif

Travail individuel, ou travail en groupe de deux ou trois élèves autour d'une table.

La consigne

Elle est toujours orale. En cas de besoin, elle est répétée ultérieurement.

> *"Construisez un labyrinthe sur la plaque de sagex en prenant des chalumeaux et en vous aidant des clous U qui sont à votre disposition. Vous pouvez couper des morceaux de chalumeaux à la longueur que vous souhaitez."*

ou

> *"Construisez un labyrinthe sur la feuille de java en prenant des chalumeaux et en les collant avec des morceaux de scotch. Vous pouvez couper les chalumeaux à la longueur que vous souhaitez."*

Il est important que le nombre de chalumeaux et de clous soit laissé à l'appréciation des élèves.

Le matériel

Un grand nombre de chalumeaux. Ils pourront être découpés à volonté selon la nécessité. Il est également intéressant de proposer des chalumeaux coudés afin de voir l'utilisation qu'en feront les élèves.

Des plaques de sagex format A3 et une centaine de clous U

ou

Des feuilles de java format A3 et quelques dérouleurs de scotch

La dimension du support dépend du nombre d'élèves travaillant ensemble. Quand ils travaillent individuellement, on utilisera de préférence le format A4.

L'activité

Selon la représentation que les élèves se font du labyrinthe, il y aura une entrée et en tout cas une sortie. Les chemins seront de différentes longueurs, la notion de carrefour apparaîtra puisque de toute évidence, les élèves n'utiliseront pas les chalumeaux comme des routes sur lesquelles ils se déplaceront.

De ces "murs" découlera donc la création de carrefours qui pourront être de plus en plus complexes; tout dépendra du nombre de chemins se coupant au même endroit.

Les réflexions des élèves seront stimulées par les questions de l'enseignante :

- Y a-t-il plusieurs carrefours ?
- Peut-on les décrire ? Sont-ils tous de la même importance ?
- Peut-il y avoir plus d'une sortie ? Plusieurs entrées ?
- Comment rendre les déplacements dans le labyrinthe plus compliqués ?

Les élèves rouleront une bille ou une petite voiture, par exemple, pour vérifier l'intérêt de leur réalisation.

LES BANDELETTES

Le dispositif

Travail en salle de jeux avec toute la classe.
Travail de quatre à six élèves sur une table.

La consigne

Elle est toujours orale. En cas de besoin, elle est répétée ultérieurement.

En salle de jeu :

> *"Construisez un grand labyrinthe".*

En classe :

> *"Construisez un labyrinthe sur le carton mis à votre disposition et collez-le".*

Le matériel

En salle de jeu :
Une centaine de bandelettes de papier java d'au moins dix centimètres de largeur.

En classe :
Selon la dimension du support, une centaine de bandelettes de papier de deux à quatre centimètres de large.
Du mi-carton de format A3 ou A4.
Quelques tubes de colle blanche.

L'activité

De la largeur des bandelettes dépendront l'espace utilisé et la création de chemins ou de murs. De toute évidence, plus les bandelettes sont fines, plus elles induiront la réalisation de murs, alors que des bandes de papier très larges suggéreront peut-être de les utiliser pour la construction de chemins.

Il va de soi que, selon le choix du matériel, les élèves évolueront en grands groupes, en petits groupes, ou individuellement. Le fait d'avoir un projet qui doit être commun obligera les élèves qui travaillent dans un groupe à communiquer leurs intentions.

ACTIVITE DES PAVAGES

L'activité de pavages consiste, avec des pièces choisies, à recouvrir une surface, sans chevauchement de pièces. Elle participe à des acquisitions importantes comme les propriétés de certaines formes et les relations qui peuvent exister entre des formes différentes, elle prépare la notion de mesure d'aire par itération d'une unité.

Un autre intérêt des pavages est d'ordre logique. Le recouvrement de la surface à paver nécessite l'utilisation de critères concernant les formes, les tailles, leur comparaison, et impose l'agencement de plusieurs formes pour en réaliser une autre.

Lorsqu'un élève cherche à reproduire un modèle, il doit l'analyser, trouver une manière de le réaliser. Il peut aussi imaginer une autre composition en tenant compte de certaines contraintes concernant la forme et la frontière. Il apparaît donc un début de raisonnement déductif à propos des équivalences d'aire, avec anticipation et vérification. L'intérêt réside avant tout dans ce travail d'anticipation qui pousse l'élève, non pas à procéder par tâtonnement de manière désordonnée, mais bien, intuitivement, à raisonner sur les formes en jeu, à choisir celles qui conviennent, à en vérifier l'adéquation.

Dans tous les cas interviennent des problèmes de repérage, de positions relatives des pièces les unes par rapport aux autres, d'organisation et de structuration de l'espace, de latéralisation. Souvent, le pavage peut offrir des occasions d'aborder des notions de rythme (le motif se reproduit régulièrement) ou préparer l'approche des symétries.

Si la forme des pièces joue le rôle principal, la couleur constitue aussi une des variables de la situation. Elle intervient comme critère dans la réalisation et peut soit faciliter la tâche de l'élève soit la rendre plus complexe.

PAVAGES : LES TRAINS	
Degrés	2E
Matériel	Une boîte de surfaces ASEN dont on a retiré les pièces du plus petit format. Une feuille de papier java de 20x15cm par élève, dimensions qui permettent un pavage exact avec les surfaces à disposition. Un support rigide, au minimum 20x30cm, pour constituer le train.
Consigne	Recouvrez chacun complètement un wagon du train à l'aide des surfaces à disposition. Il ne doit pas y avoir d'espace vide ni de superposition. Changez de place avec votre voisin de droite et mettez sur son travail une nouvelle couche de surfaces afin que tout soit exactement couvert sans vide ni chevauchement. L'arrangement doit être différent du précédent. Cette consigne est redite par l'enseignante pour que les élèves effectuent une troisième couche.
Contenu mathématique	<u>Espace</u> : Exploration de surfaces Pavages Domaines, frontières, contiguïté Equivalence d'aires
Quelques démarches possibles des élèves	Tâtonnement pour recouvrir le support en prenant des pièces qui peuvent ne pas être adaptées ou qui ne respectent pas la consigne Construction spontanée qui s'adapte après plusieurs essais à la dimension de la feuille Repérage des surfaces en vue d'une superposition Comparaison des formes par couches successives

LES TRAINS

Le dispositif

Travail par groupes de six élèves le long d'une table.
Chaque élève reçoit une feuille qui représente un des wagons du train.

La consigne

Elle est toujours orale. En cas de besoin, elle est répétée.

Le matériel

En principe, une boîte de surfaces ASEN est disponible dans chaque classe. On prendra la précaution de ne pas fournir aux élèves les pièces les plus petites. Elles rendent la manipulation compliquée et la recherche de solutions moins intéressante.

L'activité peut aussi être conduite avec d'autres matériels de type mosaïque.

L'activité

Les élèves tâtonnent jusqu'à ce qu'ils trouvent les pièces qui leur permettent de recouvrir la feuille de papier. Certains d'entre eux ne voient pas les limites du support et font déborder leurs surfaces, d'autres ont de la peine à ne pas créer de vides ou utilisent des ronds et des ovales. Les réactions à ces choix peuvent être diverses :

- ils remarquent que ces formes créent beaucoup de vides, ils les éliminent au profit de celles qui ont des côtés droits
- ils ne sont pas gênés par les vides et ne respectent pas la consigne
- ils les choisissent pour agrémenter leur production, le travail figuratif prend le pas sur le recouvrement organisé

Pour les couches suivantes, les mêmes conduites sont observées, à savoir : utilisation de formes inadéquates, dépassement du support et vides entre les pièces. Certains élèves ne tiennent compte que d'une partie de la consigne et reprennent exactement les mêmes formes pour produire la deuxième couche.

Du fait que le nombre des pièces encore disponibles diminue, la difficulté de la tâche augmente. La contrainte matérielle engage l'élève à une réflexion plus approfondie pour utiliser le plus de pièces différentes possible.

Le travail se termine par la réalisation collective du train, un élève se proposant pour réaliser la locomotive. Cette dernière activité suscite comparaisons et réflexions qui provoquent des discussions permettant d'affiner le langage.

EMBOITEMENT DE CUBES

Cette activité fait intervenir une large palette de notions relatives à l'espace. De plus, les élèves sont amenés à :

- **se confronter à un problème de constitution puis de comparaison de collections ou de nombres**

Ils créent chacun leur propre robot. Pour ne pas être influencés par leurs voisins, ils ne reçoivent ni le même nombre de cubes, ni forcément les mêmes couleurs. Ils n'ont donc pas la même répartition à l'intérieur des couleurs, ce qui invite bien à une réalisation personnelle. Le nombre de cubes distribués se situe entre 18 et 30 afin que les élèves ne soient pas tentés de les compter avant de commencer. Ce choix garantit aussi la construction de figures différentes.

Comme ils n'ont ni modèle proposé ni dessin à copier, les élèves constituent leur assemblage de proche en proche, ce qui conduit à des modifications et des adaptations au fur et à mesure de l'avancement de leur projet. Assez spontanément, ils essaient de fabriquer un robot à forme humaine, ce qui pose des problèmes de symétrie pour la réalisation des membres du personnage.

- **utiliser le nombre comme moyen efficace pour comparer des collections, et découvrir des stratégies de dénombrement**

Au moment où les élèves se posent la question de savoir pourquoi leur robot est plus grand que celui de leur camarade alors qu'il a moins de cubes d'une certaine couleur, ils cherchent à compter les cubes, mais ne sont au début pas assez méthodiques pour arriver à un résultat correct. Ils seront capables de donner le nombre exact de cubes employés lorsqu'ils maîtrisent le dénombrement.

Pour vérifier l'exactitude du nombre de cubes réellement utilisés, ils en viennent, par exemple, à créer des listes, un "mode d'emploi", en indiquant le nombre de cubes de chaque couleur.

- **réaliser une représentation graphique**

L'étape suivante consiste à reproduire graphiquement leur robot. Certains élèves choisissent une feuille blanche. Ils arrivent mieux à y représenter leur construction car ils ne sont pas soumis à la contrainte du quadrillage. Ils peuvent dessiner le robot tout à fait librement en établissant une correspondance terme à terme entre l'assemblage des cubes et la réalisation graphique correspondante.

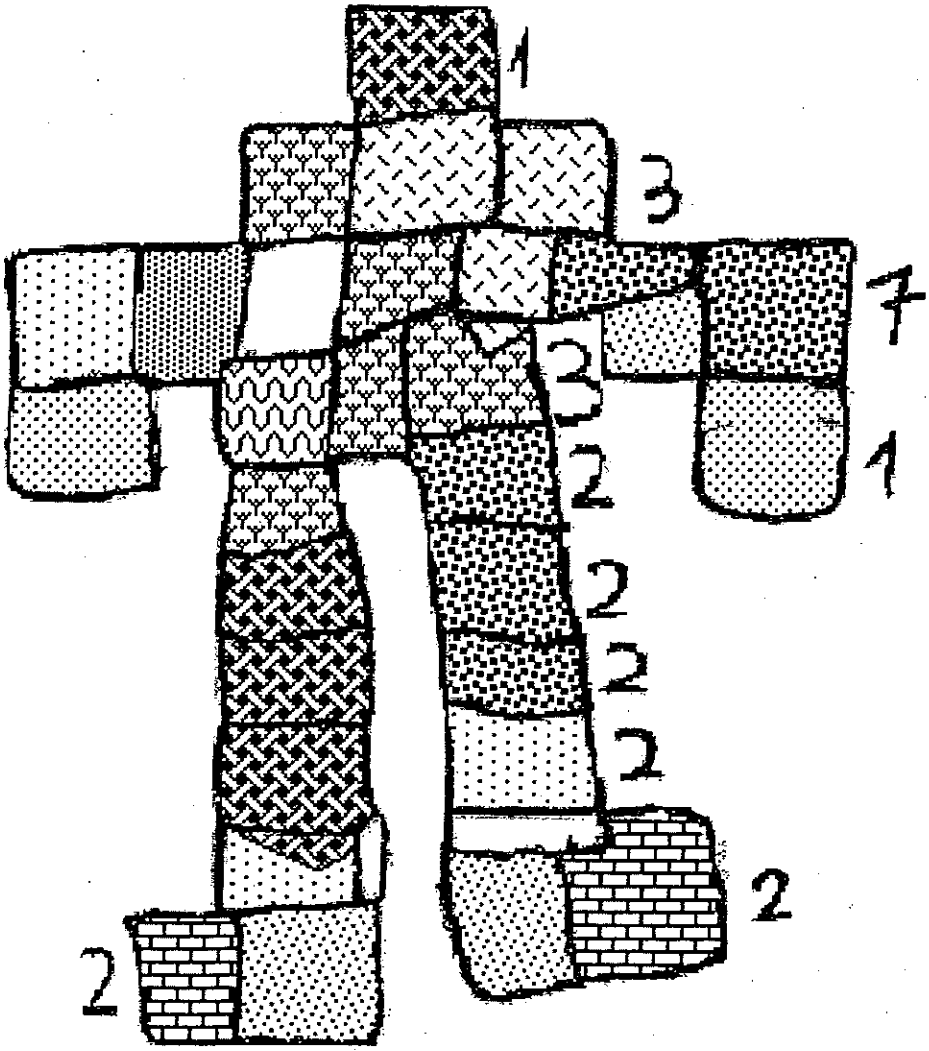
Ceux qui choisissent le quadrillage font généralement preuve d'une conduite plus élaborée. Ils ont déjà une vision plus globale de la tâche qui leur permet de tenir compte à la fois de l'objet construit pris dans sa totalité et de son mode de composition. Ils représentent leur construction en y localisant l'emplacement des couleurs. A noter que certains élèves entreprennent le travail sans se demander si la feuille doit être tenue dans le sens horizontal ou vertical et aboutissent à une impasse.

Certains d'entre eux pensent rendre la reproduction graphique plus aisée en utilisant leur robot comme chablon. Il en résulte forcément un décalage parce qu'ils éprouvent des difficultés à plaquer exactement leur création sur les lignes du quadrillage ou parce que leur habileté n'est pas encore suffisante.

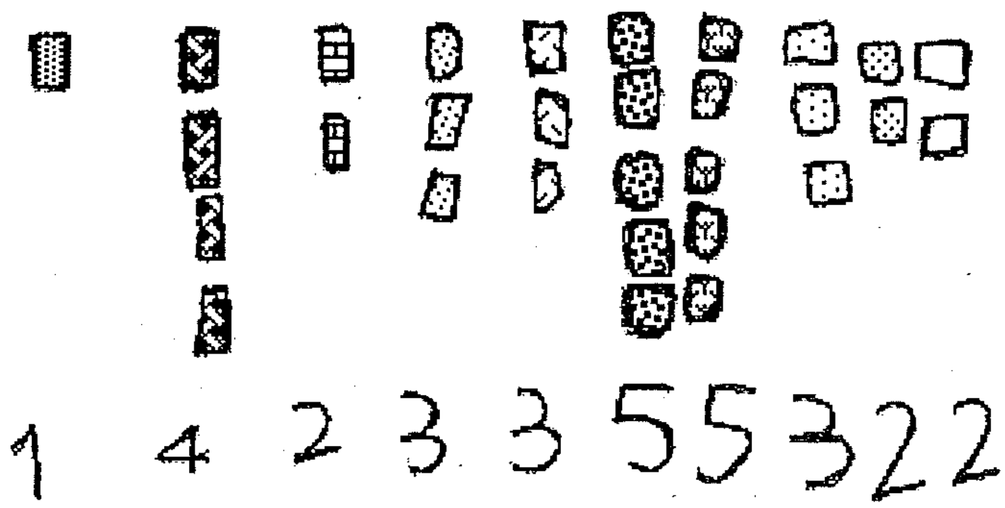
- **prendre conscience du rôle de l'écrit comme aide à la constitution d'un inventaire**

La recherche d'une stratégie pour dénombrer qui a reçu le plus grand nombre de cubes, par exemple en les comptant par couleur, offre une occasion de saisir l'utilité de l'écrit pour établir un inventaire. Le recours à des écritures numériques sous forme de listes de nombres correspondant aux différentes couleurs conduira à de premières tentatives d'addition.

Michel



Recette



LES ROBOTS	
Degrés	2E, 1P, 2P
Matériel	Cubes emboîtables de plusieurs couleurs 18 à 30 cubes par élève Feuilles quadrillées A4 correspondant à la dimension des cubes (voir annexes) Feuilles de papier blanc
Consigne	Construisez un robot "à plat" avec tous les cubes que vous avez reçus et dessinez-le sur une feuille blanche ou sur une feuille quadrillée. Essayez de savoir combien vous avez utilisé de cubes pour votre construction en en faisant l'inventaire écrit.
Contenu mathématique	Espace : repérage, reproduction dans un quadrillage Construction du nombre : comparaison et sériation de quantités, approche de la relation d'ordre (... a plus de rouges que ...) et de la relation d'équivalence. Approche de l'addition
Quelques démarches possibles des élèves	Construction spontanée qui se modifie en cours de réalisation et par nécessité d'adaptation à la dimension de la feuille Repérage de l'emplacement de chaque cube selon sa couleur en vue de la représentation graphique Localisation des cubes d'une même couleur en vue d'un inventaire écrit Comparaison des quantités par couleur Comparaison des quantités d'une réalisation à l'autre

LES ROBOTS

Le dispositif

Travail en groupe de six à huit élèves autour d'une table.
Travail individuel d'une demi-classe.

La consigne

Elle est toujours orale. En cas de besoin, elle est répétée ultérieurement.

Le matériel

- Dix-huit à trente cubes par élève distribués en vrac sans tenir compte de la couleur. L'activité demande que le nombre de cubes remis à chaque élève soit différent pour enrichir les comparaisons entre les divers nombres atteints.

- Feuilles A4 blanches et feuilles A4 dont le quadrillage correspond à la dimension des cubes.
  Les élèves sont libres de choisir le papier blanc ou quadrillé. Le choix du papier conduit à des activités quelque peu différentes; en effet, contrairement à ce que l'on pourrait supposer, la feuille quadrillée apporte une contrainte supplémentaire pour des élèves qui éprouvent des difficultés dans la réalisation de leur représentation graphique.

L'activité

A propos de la première partie de la consigne :
Les élèves construisent leur robot avec un nombre différent de cubes. En 2E et 1P particulièrement, il est important de vérifier que la construction est sur un seul plan, pour ne pas entraîner de difficultés insurmontables lors de la représentation. La réalisation est susceptible de modifications en cours de création. Le travail terminé, ils reproduisent leur invention. Certains choisissent de préférence les feuilles blanches parce qu'ils refusent la contrainte du quadrillage. D'autres prennent la feuille quadrillée. Ils commencent généralement par poser leur robot sur la feuille et adaptent leur construction si elle n'entre pas dans la page, en enlevant des cubes et en les replaçant ailleurs.
Ils le dessinent en tenant compte de l'emplacement et de la disposition des couleurs.

Une relance de l'enseignante :

"Avez-vous reproduit exactement ce que vous avez construit ?"

les invite à faire vérifier par un camarade l'exactitude de leur reproduction.

A propos de la seconde partie de la consigne :

Les élèves essaient de déterminer le nombre de cubes en cherchant une stratégie efficace : ligne par ligne, colonne par colonne ou couleur par couleur. On remarque parfois qu'un changement de stratégie en cours de route complique les choses.

Une autre relance de l'enseignante :

"Comment savoir qui a employé le plus de cubes?"

provoque des échanges verbaux intéressants. Par exemple, un robot paraît grand, mais il compte moins de cubes bleu foncé qu'un autre. On laisse les élèves voir comment résoudre le problème. La discussion s'oriente souvent vers l'idée de recenser le nombre de cubes de chaque couleur. En voici une situation vécue dans une classe :

Après plusieurs tentatives, Véronique décrète que pour savoir, il faut écrire la "recette" (le mode d'emploi) de chaque robot. Elle explique qu'il faut dire comment le robot est construit. On se alors lance dans le répertoire des cubes.

Six cubes blancs, deux cubes rouges...
Une fois la liste établie, on recense le tout par étape (un cube pour la tête, sept pour les bras, huit pour les jambes et les pieds).
Véronique : "ça y est, j'en ai 24".

Cela leur permet de faire des comparaisons de quantités par couleur puis de comparer le nombre de cubes effectivement utilisés pour chaque robot.

D'une manière générale, les élèves les plus jeunes comptent en se référant à la couleur ou parfois aux différentes parties du corps. En règle générale, en 2P, c'est le comptage total du nombres des cubes utilisés, quelle qu'en soit la couleur, qui semble pertinent aux élèves. L'activité peut alors être poursuivie dans le sens d'une décomposition du nombre total des cubes de manière à refléter la diversité des couleurs.

Prolongements

1) L'enseignante (ou un élève) reproduit au tableau un dessin dicté par un élève (mode d'emploi). On inscrit aussi le nombre de cubes de chaque couleur. Une addition est tentée par l'ensemble de la classe.

   A partir de là, les élèves en viennent à faire toutes sortes d'observations: l'un d'eux constate qu'il a plus de cubes qu'un autre mais que son robot semble plus petit; un deuxième relève qu'il a moins de cubes jaunes que son voisin et pourtant son robot est plus grand.

2) Chaque élève cache sa construction, et transmet son inventaire ainsi que le dessin de sa construction à un autre élève. Ce dernier doit choisir les cubes appropriés puis construire le même robot à l'aide du modèle. La validation se fait par la comparaison des deux robots et les deux élèves sont amenés à discuter des raisons d'éventuelles différences.

3) Un robot peut être reproduit par recouvrement. L'enseignante donne la consigne suivante :

   "Sur ce robot, construisez-en un autre; supprimez les cubes verts et remplacez-les par des jaunes. Avez-vous encore le même nombre de cubes ?"

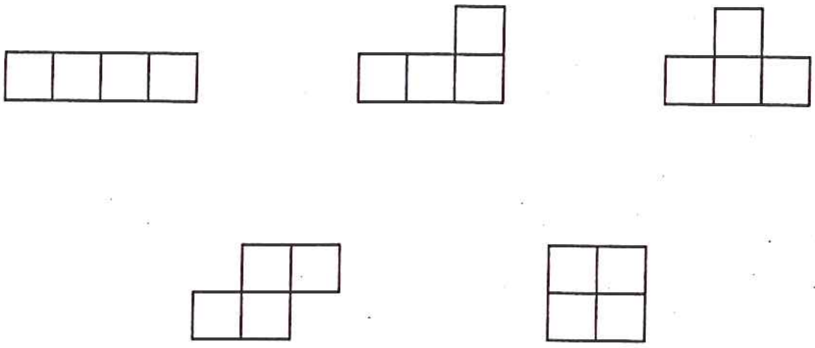
   En faisant un nouvel inventaire, les élèves se rendent compte que le robot conserve le nombre initial de cubes même si une couleur a été remplacée par une autre.

LES POLYOMINOS

Il s'agit d'une figure géométrique plane faite d'un certain nombre de carrés adjacents. Par définition, un seul carré constitue un *monomino*, deux carrés un *domino*, trois carrés un *tromino*, quatre un *tétromino*, cinq un *pentomino*, etc. Il est facile de construire les trominos, qui sont au nombre de deux et les tétrominos qui apparaissent sous cinq formes différentes.

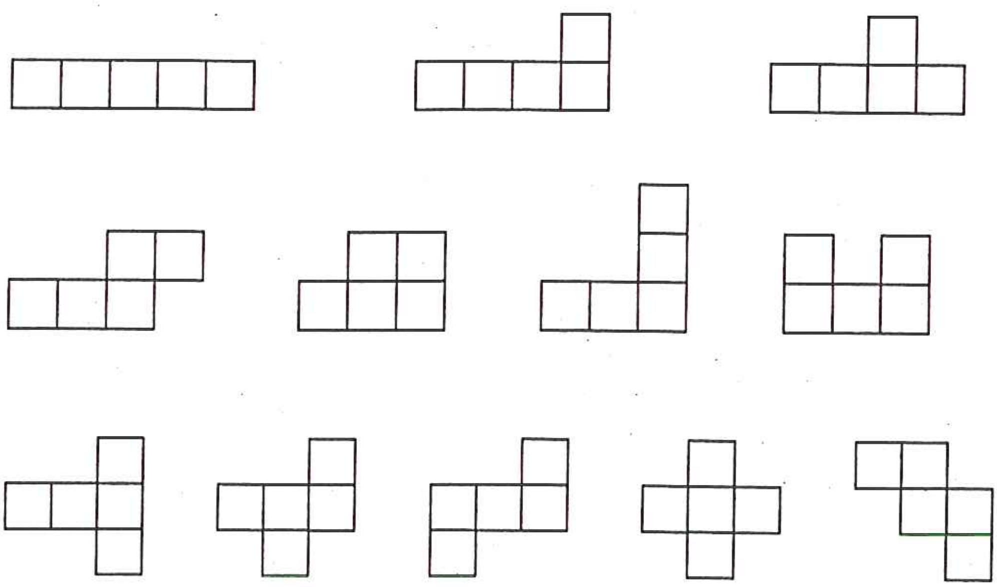
Trominos

Tétrominos



Les douze **pentominos** sont plus difficiles à trouver.

C'est pourtant par cette recherche que les élèves débuteront avant d'aborder les deux activités proposées ci-après.



LES PENTOMINOS	
Degrés	1P, 2P
Matériel	Cinq cubes emboîtables, de même couleur, par élève Deux feuilles de couleurs différentes dont le quadrillage correspond à la dimension des cubes (pour fabriquer deux séries de pièces) Des feuilles avec des quadrillages de diverses tailles (pour reproduire les arrangements)
Consigne	Construisez toutes les formes différentes possibles "à plat" avec cinq cubes. Reproduisez chaque forme sur les deux feuilles quadrillées de couleurs différentes et découpez-les. Vous aurez ainsi deux séries identiques. Assemblez sur votre sous-main deux formes semblables, chacune d'une couleur différente, avec une troisième forme pour obtenir un rectangle sans trou. Reproduisez ce rectangle sur le quadrillage de votre choix. Poursuivez votre recherche en respectant la même règle (deux formes semblables et une troisième) afin de construire d'autres rectangles que vous reproduirez également sur le quadrillage.
Contenu mathématique	<u>Espace</u> : Exploration et construction de surfaces Pavages Domaines, frontières, contiguïté
Quelques démarches possibles des élèves	Construction avec une démarche systématique Construction de formes identiques par symétrie ou rotation Construction qui n'est pas "à plat" Construction avec plus ou moins de cinq cubes Reproduction en tenant compte ou non du quadrillage Reproduction ne tenant pas compte du nombre de cubes Reproduction de la même forme en variant son orientation Reproduction en tournant autour de la forme Assemblage qui donne une forme non rectangulaire

LES PENTOMINOS

Le dispositif

Travail individuel.

La consigne

Elle est toujours orale. Etant donné la longueur de cette consigne, une partie seulement de celle-ci, qui n'aurait pas été intériorisée, peut être répétée ultérieurement.

1. "Construisez toutes les formes différentes possibles "à plat" avec cinq cubes".
2. "Reproduisez chaque forme sur les deux feuilles quadrillées de couleurs différentes et découpez-les. Vous aurez ainsi deux séries identiques."
3. " Assemblez sur votre sous-main deux formes semblables, chacune d'une couleur différente, avec une troisième forme pour obtenir un rectangle sans trou ".
4. " Reproduisez ce rectangle sur le quadrillage de votre choix."
5. " Poursuivez votre recherche en respectant la même règle (deux formes semblables et une troisième) afin de construire d'autres rectangles que vous reproduirez également sur le quadrillage ".

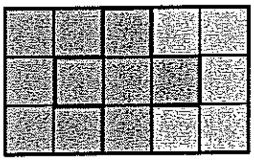
Le matériel

Cinq cubes emboîtables, de même couleur, par élève.
Deux feuilles de couleurs différentes dont le quadrillage correspond à la dimension des cubes.
Des feuilles avec des quadrillages de diverses tailles.
Des feuilles dont le quadrillage correspond à la dimension des cubes.

L'activité

Les élèves cherchent une forme en emboîtant les cinq cubes. Ils la représentent graphiquement sur les deux quadrillages de couleur.
Puis ils détruisent leur invention et en cherchent une autre. Ils procèdent de la même manière jusqu'à ce qu'ils aient découvert les douze possibilités. Si, après un certain temps de recherche, un élève n'a pas trouvé l'ensemble des possibilités, il peut se référer à une collection complète afin de terminer la sienne.
Il arrive parfois que certains élèves aient l'impression d'avoir trouvé toutes les combinaisons uniquement parce qu'ils ont dessiné plusieurs fois une même forme mais dans des positions différentes. Il peut également se produire que des inventions ne soient pas retenues car elles ne sont pas construites "à plat". Dans la mesure du possible, l'enseignante suscitera des concertations entre élèves afin qu'ils dépassent ces obstacles.
Certains élèves ont besoin de deux feuilles, l'espace du quadrillage étant mal employé lors de la représentation graphique.
Après avoir découpé toutes leurs productions, les élèves s'exercent à emboîter deux formes identiques de couleur différente, avec une troisième forme (elle sera forcément d'une couleur identique à l'une des deux premières choisies, et de forme différente) pour former un

premier rectangle. Le plus souvent, ce rectangle est formé d'une croix au centre et deux "ponts" autour.



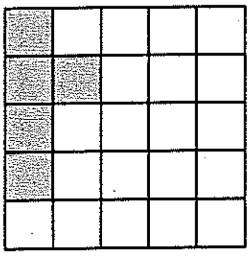
Prolongements

- L'enseignante demande aux élèves de chercher des rectangles ou des carrés en emboîtant autant de formes qu'ils le désirent, choisies parmi les deux séries. Ils les reproduisent ensuite sur un quadrillage.

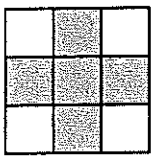
- L'enseignante demande aux élèves de construire des rectangles dont un côté mesure toujours cinq carrés. Ils dessinent leurs arrangements afin de comparer les solutions différentes pour un même rectangle. Il est possible de construire tous les rectangles compris entre 5x3 et 5x12.

- Un classement s'effectue à partir de la forme la plus simple (le bâton) pour trouver toutes celles qui peuvent être réalisées en déplaçant d'abord un cube, puis deux.

- L'enseignante demande aux élèves de découper dans une feuille quadrillée correspondant à la grandeur des cubes quelques carrés de 5 x 5, 4 x 4, 3 x 3. Ils reprennent les douze formes découpées précédemment et cherchent à les placer sur les carrés, de manière que chaque pièce touche simultanément les deux côtés opposés du carré. Ils dessinent alors la forme dans le carré choisi.
  Très souvent la consigne n'est pas respectée et la figure se place dans un carré trop grand, il faut alors rectifier.



On répertorie dans quel carré s'inscrit chaque forme. Ce sont celles qui s'inscrivent dans un carré de 3 sur 3 qui posent le moins de difficultés.



LES PROBLEMES

QUELQUES EXEMPLES

DANIELLE BERNEY, FRANCOISE HIRSIG, NADIA GUILLET,

EL HADI SAADA, RICHARD SCHUBAUER

DES PROBLEMES POUR LE CYCLE ELEMENTAIRE

Les mathématiques se construisent en résolvant des problèmes. C'est par la mise en oeuvre de raisonnements, de démarches, qu'un individu ou un groupe d'individus est conduit à fournir des réponses, complètes ou partielles, à certaines sollicitations. Ces dernières sont liées au problème lui-même ou créées par une institution qui, moyennant des contraintes, a par exemple l'intention de faire acquérir à l'individu un contenu notionnel défini.

Aux prises avec un problème dont l'institution (enseignants, auteurs de manuels) aura non seulement prévu l'énoncé, le dispositif matériel, mais aussi organisé les conditions de réalisation et le lien avec le programme, l'élève va engager un certain nombre d'actions finalisées par la recherche de solutions qui aient du sens pour lui, pour ses pairs, pour l'institution scolaire et la communauté mathématique.

EXISTE-T-IL DES PROBLEMES MATHEMATIQUES POUR LE CYCLE ELEMENTAIRE ?

Les éléments de réponse que nous souhaiterions apporter devraient être suffisamment convaincants pour offrir aux enseignants des arguments et des objets d'enseignement justifiant la nécessité de placer les très jeunes élèves devant de vraies situations problématiques. Mais avant de répondre, faisons un petit détour.

Quelques ingrédients pour un problème mathématique

- Il doit comporter un énoncé qui n'induit ni la solution ni les démarches y aboutissant.
- Il doit ouvrir la porte à la curiosité des élèves, à leur désir de chercher.
- Il doit appartenir à un champ conceptuel[3] familier aux élèves pour qu'ils puissent y entrer, se fixer un premier but à atteindre, mettre en oeuvre leurs premières démarches de résolution.

Durant le cycle élémentaire, on peut être tenté de se limiter, en mathématiques, à des manipulations d'objets concrets, conduisant fréquemment à des constats. Cependant, l'activité mathématique du sujet n'est pas dans ce type d'action, elle consiste principalement à anticiper sur l'action concrète. Nous pourrions même aller jusqu'à affirmer qu'une solution entièrement empiriste pourrait s'opposer, voire nuire à une solution mathématique.

Cette prise de position ne doit pas être considérée comme la mise à l'index de toute manipulation, bien au contraire, son rôle est de signaler aux enseignants les limites d'activités qui se cantonneraient à cela. A l'école, la manipulation d'objets réels tient une place très importante, qu'il faut à chaque occasion défendre; elle favorise entre autres la construction des premières représentations de l'élève sur un problème donné; elle est aussi

[3] Par exemple, les structures additives, les classifications logiques.

un moyen, trop souvent oublié, de vérification du raisonnement et de la solution mathématiques.

Tous les problèmes n'ont pas les mêmes finalités ni les mêmes formes. Des problèmes conduisent à l'élaboration d'un savoir procédural, à l'exemple de ceux qui traitent, dans les pages qui suivent, de l'étude des réseaux, des partages (problèmes 1, 2 et 3); d'autres conduisent à des apprentissages en fonction d'objectifs notionnels précis, comme ici ceux de la séquence "sorcières et pirates".

Poser puis résoudre, de l'enseignante à l'élève

Pour qu'il y ait problème, une condition s'avère nécessaire : qu'il y ait des obstacles à franchir. Pour l'enseignante, il s'agit, en fonction des objectifs d'apprentissage, de proposer de "bons problèmes", c'est-à-dire des problèmes pour lesquels la connaissance à acquérir par l'élève soit la solution à la question posée. Cela nécessite une bonne connaissance des contenus notionnels et une anticipation sur les démarches de résolution des élèves.

Résoudre un problème, c'est vouloir atteindre un but sans connaître toutes les démarches pour y parvenir. La tâche de l'élève est alors la suivante :

- prendre de l'information dans les données
- établir les relations qui décrivent la situation problématique, les organiser, les modéliser[4]
- imaginer des solutions plausibles, les examiner, les vérifier, calculer des relations
- construire des connaissances comme solution au problème posé

LA CONSIGNE : UNE CONTRAINTE DE LA SITUATION

Soumettre un problème aux élèves impose inévitablement de réfléchir sérieusement à la consigne. Celle-ci est pensée dans ses moindres détails en vue d'engendrer des représentations et des procédures les plus variées possibles pour atteindre un but précis : trouver une solution au problème énoncé, problème d'ordre mathématique.

On peut distinguer la consigne qui énonce précisément le problème mathématique des explications préalables visant à contextualiser ce problème. Prenons pour exemple le problème de logique "les sorcières"[5].

Expliquer aux élèves qu'ils vont travailler en groupes de trois et que l'un d'eux va jouer le rôle de messager chargé de récupérer les cartes manquantes fait partie de l'organisation. Signaler que le jeu de cartes qu'ils vont recevoir est un jeu complet formé de cartes toutes différentes dont on va retirer trois cartes au hasard sans que les élèves ne voient lesquelles est en quelque sorte une contextualisation du problème.

Récupérer en un seul voyage les trois cartes qui manquent, en disant très précisément comment elles sont, représente la consigne du problème à résoudre.

---

[4] Un aspect important de l'activité mathématique est de construire des modèles pour expliquer et transformer le réel.

[5] Voir p. 61.

Les éléments qui font le problème dans cette consigne sont :

- en un seul voyage
- 3 cartes
- en disant (très précisément comment elles sont).

Ce sont des variables que l'on a choisi de fixer ainsi afin d'obtenir les effets suivants :

- Le fait de ne pas pouvoir entreprendre plusieurs voyages pousse les élèves à effectuer un classement suffisamment efficace dans le but de faire l'inventaire complet des critères et attributs ayant présidé à la construction de ce jeu très structuré (ce qui constitue le fond du problème).

- Le choix de retirer trois cartes a pour intention de susciter la nécessité, lorsque la mémoire fait défaut, d'avoir recours à l'écrit et, en l'occurrence, de permettre aux élèves de créer leur propre code, voire d'en utiliser un déjà construit dans d'autres activités scolaires ou de la vie courante.

- La dernière variable propose une situation de communication orale et non écrite. Le code noté par le groupe sert de mémoire au messager, il n'est pas transmis à l'enseignante. Il peut donc être très succinct, éventuellement incompréhensible pour un lecteur étranger au groupe, mais tout à fait suffisant pour que le messager remplisse sa fonction.

Voici donc explicités les choix qui ont conduit à la rédaction d'une telle consigne.

C'est pourquoi nous engageons les enseignantes **à ne pas modifier les consignes et relances proposées** et nous le rappelons en apposant un petit cadenas à côté de chacune d'elles.

ETUDE DE RESEAUX

THESEE S'EST-IL POSE UN PROBLEME ?
OU LA DECOUVERTE D'UN ALGORITHME

Rappelons que les premières connaissances spatiales de l'enfant sont d'ordre topologique et non métrique : les notions de proximité, d'ordre, de direction, priment sur la mesure des distances.

Ces notions forment une connaissance sociale, utile et pratique : déplacement dans une ville, organisation de ce déplacement, communication de ce déplacement oralement ou par écrit, lecture de plans, fabrication de plans, par exemple.

Les labyrinthes sont des réseaux constitués de carrefours et de chemins. Contrairement à la légende, ils ne sont jamais inextricables. Ces réseaux peuvent être parcourus entièrement par un mobile, sans quitter les chemins et sans passer plus de deux fois sur chacun d'eux.

Le problème est la découverte d'une méthode, la plus élégante possible.

Les situations-problèmes des "labyrinthes" proposées dans ce chapitre contribuent à la construction d'un espace dans lequel ni les distances, ni les angles, ni le parallélisme, ni la rectitude des lignes ne sont conservés.

Le but d'utiliser un cache avec fenêtre est évident : mettre les élèves dans une situation réelle d'exploration où le champ spatial n'est pas visible d'un seul coup d'oeil, mais où la configuration du labyrinthe est découverte au fur et à mesure des déplacements.

Dans le cas de la recherche du fromage par une petite souris, le parcours du réseau s'arrête dans un premier temps dès que le fromage est découvert. Ce sont souvent des solutions contingentes et il n'y a pas de prise de conscience par l'élève de la nécessité de "mettre en mémoire" le trajet, encore moins de décrire une méthode. Nous sommes néanmoins devant un vrai problème, il y a un but à atteindre pratiquement et la démarche pour y parvenir est entièrement à la charge de l'élève; ce dernier va faire des hypothèses, les mettre à l'épreuve, les valider ou les réfuter au gré des rétroactions du dispositif. Par exemple, les carrefours, les impasses sont autant d'obstacles que l'élève doit franchir en faisant des inventaires, des choix, des retours en arrière à des carrefours précédents, pour résoudre le problème qui consiste à trouver l'emplacement du fromage.

Le problème n°1 ne conduit pas encore les élèves à une connaissance des propriétés mathématiques des réseaux, ni à une connaissance procédurale.

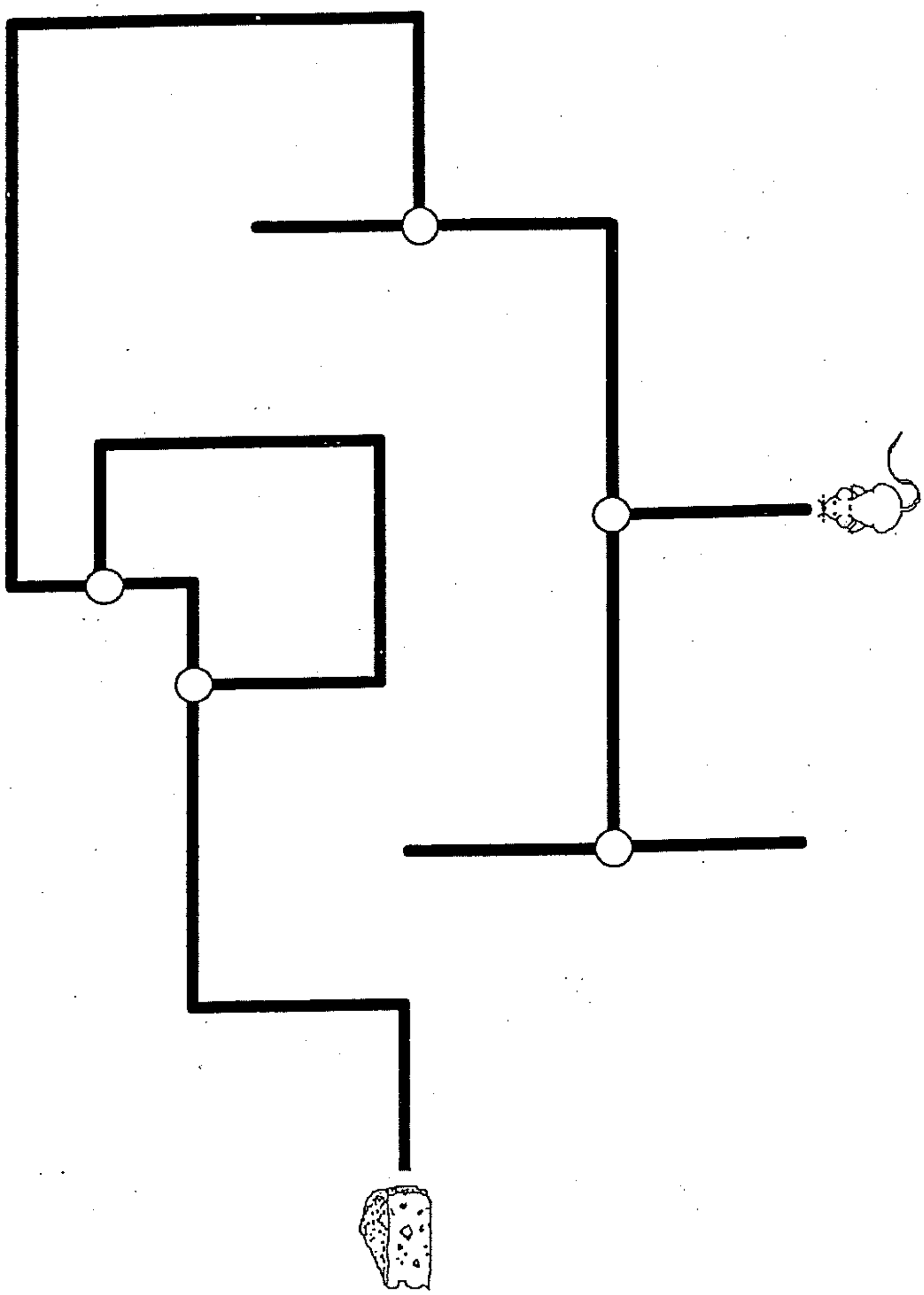
Le problème n°2 qui demande aux élèves de coder leur trajet, va les placer devant la nécessité de passer des connaissances en actes élaborées dans la résolution du premier problème, à une prise de distance avec l'action par la formulation d'un codage du trajet parcouru. Ils devraient dès lors prendre en compte les chemins et les carrefours, les situer les uns par rapport aux autres (relation d'ordre), retenir ceux qui ont une pertinence pour la communication, indiquer les choix effectués à chaque carrefour (donc aussi signaler les

chemins à ne pas suivre), en d'autres termes, reformuler sur le plan du dessin les relations déjà traitées en actes. Cela conduit à la création d'un "graphe" du trajet.
Passer de l'action (problème n°1 : construction d'un savoir-faire) à l'élaboration de connaissances mathématiques (problème n°2 : notion de réseau, d'espace non métrique, d'algorithme, de relation d'ordre) doit être pris en charge par une situation-problème adaptée. La désignation des objets de savoir mathématiques construits dans la séquence des labyrinthes sera pour plus tard (3P, 4P).

<table>
<tr><th colspan="3">ETUDE DE RESEAUX</th></tr>
<tr><th colspan="3">PROBLEME N°1</th></tr>
<tr><td>Degrés</td><td colspan="2">1E, 2E, 1P</td></tr>
<tr><td>Matériel</td><td colspan="2">Divers dessins de labyrinthes (voir page suivante et annexes numéros 1 à 21)
Caches opaques de format A3 avec fenêtre centrale de 17x17mm, à fabriquer</td></tr>
<tr><td>Consigne</td><td colspan="2">La souris est à la recherche du fromage.
Vous devez trouver le trajet qu'elle doit parcourir pour y arriver.
Elle ne se déplace que sur les chemins.
Vous ne devez jamais regarder sous le cache pendant la recherche.</td></tr>
<tr><td>Contenu mathématique</td><td colspan="2">Notion de réseau, de rapports de position, d'algorithme[6], relation d'ordre</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Variables didactiques</td><td>Désignation</td><td>Valeur</td></tr>
<tr><td>carrefour (noeud)</td><td>– d'ordre 3 (à l'intersection de 3 chemins)
– d'ordre 4 (à l'intersection de 4 chemins)</td></tr>
<tr><td>nombre de carrefours</td><td>5 à 10</td></tr>
<tr><td>réseau</td><td>connexe</td></tr>
<tr><td rowspan="3">trajet</td><td>– en lignes droites
– en lignes courbes</td></tr>
<tr><td>– unique
– équivalents[7]</td></tr>
<tr><td>– sans boucle
– avec boucle</td></tr>
<tr><td>impasse</td><td>– après 1 carrefour
– après 2 (max. 3) carrefours</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Quelques démarches possibles des élèves</td><td colspan="2">• dans un nouveau carrefour :
choix au hasard
choix selon une règle personnelle
• dans un carrefour déjà exploré :
choix au hasard
choix excluant un (des) trajet(s) déjà parcouru(s)
choix selon une règle personnelle
• en cas d'impasse :
retour au carrefour précédent
retour au point de départ</td></tr>
</table>

6 Ensemble de règles opératoires.

7 Ensemble des chemins qui permettent d'aller de la souris au fromage.



COMMENTAIRES AU PROBLEME N°1

Le dispositif

Travail individuel, conseillé avec 10 élèves au plus, afin de permettre à l'enseignante de repérer quelques démarches d'élèves.

Prévoir 2 ou 3 postes de travail de plus que d'élèves pour créer un tournus qui respecte le rythme de chacun.

A chaque poste un labyrinthe différent est dissimulé sous le cache avec la fenêtre placée sur la souris.

Les élèves se déplacent d'un poste à l'autre, sans qu'il soit tenu compte de la complexité des réseaux. Chacun passe à un certain nombre de postes.

Le matériel

Une série de labyrinthes différents (voir annexe).

Une série de caches à fabriquer de format A3 (impératif) en carton avec une fenêtre centrale de 17 mm sur 17 mm (dimension de la fenêtre en relation avec ces labyrinthes).

Les labyrinthes sont fixés à l'aide de papier collant pour éviter les glissements lors de la manipulation du cache.

La consigne

Elle est transmise oralement sans explication supplémentaire ni démonstration; la répéter si nécessaire, toujours sans modification.

La relance

L'élève prend lui-même la responsabilité d'annoncer la découverte du fromage. L'enseignante propose alors la relance suivante :

"Retrouve la souris, toujours en suivant les chemins".

Cette action prépare le poste pour l'élève suivant et soulève un problème intéressant : l'opération inverse.
Après cette seconde tâche, l'élève choisit un nouveau poste libre.

Mise en oeuvre, quelques remarques

C'est dans les premiers labyrinthes que l'élève traite le problème proposé. Il s'engage dans des démarches qui exigent de lui des hypothèses, des choix, des créations d'algorithmes. L'exploration de quelques autres labyrinthes lui permet de faire fonctionner ses connaissances construites sur le problème. Multiplier l'exercice n'a guère de sens, il ne s'agit pas "d'apprendre les labyrinthes".

Quelques démarches observables liées à la présence de carrefours :

- l'élève passe le carrefour sans se préoccuper des choix possibles ;
- arrivé à une impasse ou pris dans une boucle, l'élève revient sur le dernier carrefour, prend conscience des choix offerts et explore une nouvelle branche ;
- selon la complexité du réseau, après avoir exploré tous les choix possibles d'un carrefour, l'élève remonte autant de fois que nécessaire à des carrefours antérieurs (y compris jusqu'à la souris).

Suite à la relance de l'enseignante, lorsque les élèves doivent retrouver l'emplacement de la souris, leurs démarches seront différentes puisqu'ils savent dans quelle région se trouve la souris.

Le rôle de l'enseignante n'est pas de valider les démarches de chaque élève ni de contrôler que le fromage est trouvé, mais bien plutôt d'observer des élèves en situation de résolution de problème.

ETUDE DE RESEAUX	
PROBLEME N°2	
Degrés	2E, 1P, 2P
Matériel	Des paires avec et sans fromage de labyrinthes (voir annexes de A1 à G2) Caches opaques de format A3 avec fenêtre centrale de 17x17mm, à fabriquer Petites feuilles pour messages
Consigne	A l'adresse du groupe émetteur : Vous devez découvrir le fromage qui est caché dans votre labyrinthe. Préparez ensuite un message pour que vos camarades trouvent le plus facilement possible la place du fromage. A l'adresse du groupe récepteur : A l'aide du message de vos camarades, vous devez retrouver la place du fromage et le dessiner.
Contenu mathématique	Notion de réseau, de rapports de position, d'algorithme Relation d'ordre Codage et décodage
Variables didactiques	Voir celles du problème n°1
Quelques démarches possibles des élèves	Pour les émetteurs : • reproduction totale ou partielle du labyrinthe • reproduction du trajet • représentation topologique du trajet • production d'un code (flèches, mots indiquant des directions) • production d'un texte Pour les récepteurs : • déplacements sur le labyrinthe sans prise en compte du message • lecture du message • exécution partielle des indications du message • exécution intégrale des indications du message jusqu'à une solution • demande de compléments d'informations

COMMENTAIRES AU PROBLEME N°2

Le dispositif

Travail avec une demi-classe divisée en équipes de 6 élèves au maximum. Chaque équipe peut être partagée en 2 groupes : par exemple 3 émetteurs et 3 récepteurs. Chaque groupe aura l'occasion d'être émetteur et récepteur.

Les labyrinthes d'une même équipe sont placés côte à côte pour permettre aux élèves de constater la réussite ou l'échec à la fin du travail.

Le labyrinthe du groupe émetteur, dissimulé sous le cache, comporte un fromage. Le labyrinthe du groupe récepteur, identique à celui du groupe émetteur, également dissimulé sous un cache, ne comporte pas de fromage.

Pendant que les émetteurs préparent les messages, les récepteurs sont occupés à d'autres activités. Ils interviennent au fur et à mesure que les messages sont prêts.

De même, pendant que les récepteurs décodent les messages, les émetteurs sont occupés ailleurs et n'interviennent en aucune façon.

L'équipe (les 2 groupes) se réunit pour constater la réussite ou l'échec de la tâche.

La consigne

Elle est transmise oralement à chaque équipe devant son matériel, sans explication supplémentaire; la répéter si nécessaire, toujours sans modification.

Pour que les élèves comprennent mieux la consigne, l'enseignante peut montrer une paire de labyrinthes, et préciser qu'un groupe a le labyrinthe avec fromage et l'autre groupe a le même labyrinthe sans fromage.

Mise en oeuvre, quelques remarques

L'observation des élèves a mis en évidence certaines démarches qui ont nécessité des relances :

a) Les élèves inventent un labyrinthe sans relation avec celui de la tâche. Ils dessinent un fromage, une souris et tracent des chemins compliqués pour les relier. Ils se représentent cette tâche comme la création d'un nouveau labyrinthe que les récepteurs devront parcourir en plaçant leur cache sur le message.
Relance :

> *"Je vous rappelle que vos camarades ont le même labyrinthe que vous, sans fromage. A l'aide de votre message, peuvent-ils retrouver la place du fromage et le dessiner ?"*

b) Les élèves préparent un message en ne faisant appel qu'à leur mémoire du trajet. Ils n'arrivent pas à produire un message transmissible.
Relance :

"Il n'est pas interdit de parcourir le labyrinthe autant de fois que nécessaire."

Les autres démarches observées ne nécessitent pas d'intervention de l'enseignante, la validation des messages produits est à la charge des récepteurs. C'est dans la reprise du même problème avec d'autres labyrinthes que les représentations des élèves émetteurs et récepteurs vont évoluer en fonction des contraintes de la situation : concertation entre groupes et changement de rôles.

c) Les récepteurs cherchent à découvrir un fromage sur leur labyrinthe (analogie avec le problème n°1).
Relance : (rappel de la consigne "récepteur")

"A l'aide du message de vos camarades, vous devez retrouver la place du fromage et dessiner le fromage sur votre labyrinthe."

Les autres démarches qui ne conduisent pas à une solution du problème seront remises en cause dans la suite du travail avec d'autres labyrinthes, grâce à la confrontation entre les groupes et au changement de rôles.

En passant d'un labyrinthe à l'autre (deux ou trois paires au maximum), les démarches suivantes sont susceptibles d'apparaître :

- améliorations successives du message
- abandon d'un codage au profit d'un autre
- reprise du code qui a permis d'atteindre la solution

Le scénario avec changement de rôles est repris tout de suite ou les jours suivants.

Dans tous les cas, il est important que l'enseignante n'intervienne ni sur le type de message créé ni sur les arguments émis par les élèves.

LES INTERACTIONS ET COMMUNICATIONS ENTRE ELEVES

Des travaux de recherche portant sur le rôle des interactions sociales dans l'acquisition des connaissances ont montré que les élèves peuvent tirer un bénéfice cognitif réel du travail en petits groupes. Notons, cependant, que celui-ci exige une rigueur toute particulière dans son organisation et dans son fonctionnement; cet aspect relève de la responsabilité de l'enseignante. Autrement dit, il ne s'agit pas seulement de mettre ensemble des élèves pour que ce type de dispositif produise les effets souhaités, mais il faut créer les conditions nécessaires pour que la situation didactique[8] puisse prendre en charge les interactions souhaitées.

Deux conditions importantes sont à retenir à propos de ce type de travail :

- il doit comporter une problématique et un enjeu cognitif pour les participants
- il doit aussi permettre une réelle confrontation de points de vue entre les élèves pour trouver une solution commune au problème

Par exemple, dans les "partages", les élèves sont appelés à résoudre un problème en partageant équitablement un ensemble de jetons ou de perles. Ils engagent, dans un premier temps, des procédures individuelles (chacun pour soi), sans tenir compte des autres; dans un deuxième temps, ils procèdent à des comparaisons de quantités individuelles, et ensuite, à des égalisations réciproques. Cette dernière phase, l'égalisation des parts, exige des élèves de trouver un accord portant sur la mise en relation entre les parties (reste compris) et le tout. Ces échanges se déroulent essentiellement à propos d'un enjeu cognitif qui est celui de la notion de division et d'équivalence numérique.

Le travail en petits groupes à propos d'une tâche mathématique est souvent l'occasion de conflits de points de vue (conflits de nature socio-cognitive). Tenir compte de la proposition et de l'argument d'autres élèves, expliquer sa propre démarche, en vérifier la pertinence et la reformuler si nécessaire, interroger les différents éléments composant une solution au problème et en découvrir d'autres, permettent aux élèves de surmonter progressivement leurs divergences initiales et de mettre en oeuvre une solution commune. Ce travail en petits groupes implique également pour l'élève le passage de l'implicite de sa démarche à son explicitation, en lui donnant l'occasion de prendre de la distance avec la tâche à résoudre.

Ainsi le fait de chercher en commun donne lieu, dans une certaine mesure, à une prise de conscience des enjeux cognitifs du problème, à la fois sur le plan individuel et interindividuel.

En effet, en abandonnant et en réorganisant de nouvelles représentations de connaissances à la suite des interactions, le travail en petits groupes permet aux élèves de formuler de nouvelles hypothèses et d'ouvrir d'autres pistes à explorer.

[8] La situation didactique est "un ensemble de rapports établis implicitement et/ou explicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu (comprenant éventuellement des instruments ou des objets) et un système éducatif (le professeur) aux fins de faire approprier à ses élèves un savoir constitué ou en voie de constitution." (G. Brousseau, 1982)

LES PARTAGES[9]

Cette séquence de quatre problèmes constitue une approche du concept de division mettant en relation les notions de parts égales, de nombre de parts, de reste, de collection initiale.

Elle apporte une contribution à la construction du nombre et, dès la 3P, s'inscrit dans le travail entrepris sur le concept et la technique de la division.

DE L'UTILISATION DE LA SEQUENCE

En 2E, la séquence ne contient que le premier problème, tandis qu'en 2P, elle est constituée des quatre problèmes.

Ce serait une erreur de comprendre que, si le problème no 1 a déjà été fait en 2E, il n'a plus son utilité dans les degrés suivants.

En effet, le dernier problème n'est pas la somme des difficultés des problèmes précédents, mais chaque problème présente un intérêt particulier dû aux modifications des variables, consciemment décidées.

Lorsqu'un des problèmes est jugé non réussi, il n'est pas judicieux que l'enseignante explique la bonne démarche, donne le bon raisonnement, puis fasse refaire le même problème en changeant de nombres jusqu'à ce qu'il soit réussi par toute la classe ! (voir "contraintes et variables" p.58).

En revanche, après quelques semaines d'activités mathématiques diverses, le problème peut être redonné tel quel.

[9] Un travail de recherche sur le thème des partages a été conduit par J. Brun, professeur à la FPSE, en collaboration avec le groupe math du SRP. Cette séquence est inspirée de ERMEL : "Apprentissages numériques", grande section de maternelle,Hatier 1990, p. 144.

<table>
<tr><th colspan="3">PARTAGES</th></tr>
<tr><th colspan="3">PROBLEME N° 1</th></tr>
<tr><td>Degrés</td><td colspan="2">2E, 1P, 2P, 3P</td></tr>
<tr><td>Matériel</td><td colspan="2">1 boîte ou un "plat"
Des jetons de même couleur</td></tr>
<tr><td>Consigne</td><td colspan="2">Vous devez vous partager ces jetons.
Il faut que chacun ait le même nombre de jetons.
Il doit en rester le moins possible dans la boîte.</td></tr>
<tr><td>Contenu mathématique</td><td colspan="2">Domaine numérique : ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}$
Le tout comme somme des parties
La division-partage : équivalence des parts + reste</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Variables didactiques</td><td>Désignation :</td><td>Valeur :</td></tr>
<tr><td>Nombre d'élèves par groupe</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Nombre de jetons</td><td>47, 50 ou 53 (1P-2P)
20 ou 23 (2E)</td></tr>
<tr><td>Reste</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Quelques démarches possibles des élèves</td><td colspan="2">Partage :
• chacun pour soi
• distribution faite par un élève
• partage organisé, chacun prend en même temps le même nombre de jetons
Comparaison des parts :
• par correspondance terme à terme
• par comptage
Egalisation des parts ou reprise du partage devant l'impossibilité d'égaliser</td></tr>
</table>

COMMENTAIRES AU PROBLEME N°1

Le dispositif

Une demi-classe, répartie en groupes de trois élèves. Cette organisation est voulue pour favoriser la construction d'une signification commune de la tâche et des notions visées, sans intervention de l'enseignante.

Le matériel

Des jetons de même couleur ou tout autre matériel uniforme, ceci pour ne pas entraîner des partages par espèces d'objets.
Le nombre total de jetons à partager dépasse les connaissances numériques construites par les élèves de 2E et 1P; ce choix est fait pour que la part de chacun leur pose encore problème. La valeur du reste (2) peut entrer en conflit avec la représentation que se font les élèves de " le moins possible".

La consigne

Elle est transmise oralement sans explication supplémentaire; la répéter si nécessaire, toujours sans modification.

La relance de l'enseignante

Quand les élèves annoncent la fin de leur travail, l'enseignante demande :

"Pourquoi dites-vous que c'est fini ?"

Si le groupe n'a pas pris en compte toutes les données de la consigne (partage, parts égales, reste minimum), l'enseignante les leur rappelle, sans modification.

Mise en oeuvre, quelques remarques

Pour traiter ce problème, les élèves engagent trois types de procédures[10] non exclusives et qui se recoupent parfois.

Les procédures de partage ne varient guère au fil des degrés. En général, dans un premier temps, les élèves puisent "chacun pour soi" et prennent la plus grande quantité possible, puis reconsidèrent la situation.

Les procédures de comparaison dès la 2E sont presque toutes fondées sur le comptage des parts.

---

[10] Voir "Quelques démarches possibles des élèves" à la page 47 .

Les procédures d'égalisation dépendent de l'écart entre les trois parts; plus les écarts sont grands, plus l'égalisation pose problème.

Comme le problème ne comporte pas de question sur le nombre d'objets de chacune des parts ou du tout, mais porte sur le partage en parts égales, l'enseignante n'attendra pas forcément une réponse en termes numériques. Nous n'avons d'ailleurs rencontré que quelques groupes d'élèves qui dénombraient le tout avant ou après partage.

Exemples de réponses :

> *"On en a le même nombre et il en reste le moins possible".*

> *"On en a le même nombre et il en reste 2, on ne peut pas les donner sinon on n' a plus le même nombre".*

En 2P, nous avons observé des groupes qui sont absolument sûrs de l'égalité de leurs parts parce qu'ils font entièrement confiance à leur procédure de partage; le comptage est inutile.

PARTAGES

PROBLEME N° 2

<table>
<tr><td>Degrés</td><td colspan="2">1P, 2P, 3P</td></tr>
<tr><td>Matériel</td><td colspan="2">1 boîte
6 fils électriques semi-rigides de 25 à 30 cm avec un noeud à une extrémité
Des perles de couleurs, de formes et de tailles différentes</td></tr>
<tr><td>Consigne</td><td colspan="2">Vous devez vous partager ces perles pour vous faire chacun 2 bracelets.
Il faut que chaque bracelet ait le même nombre de perles que tous les autres bracelets.
Il doit en rester le moins possible dans la boîte.</td></tr>
<tr><td>Contenu mathématique</td><td colspan="2">Domaine numérique : ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}$
Le tout comme somme des parties
La division-partage : équivalence des parts + reste</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Variables didactiques</td><td>Désignation :</td><td>Valeur :</td></tr>
<tr><td>Nombre d'élèves par groupe</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Nombre de bracelets</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Nombre de perles</td><td>64 ou 70</td></tr>
<tr><td>Reste</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Quelques démarches possibles des élèves</td><td colspan="2">Partage en 3 parts ou en 6 parts :
• chacun pour soi
• distribution faite par un élève
• partage organisé, chacun prend en même temps le même nombre de perles
Comparaison des parts :
• par comparaison des longueurs
• par correspondance terme à terme
• par comptage
Egalisation des parts ou reprise du partage devant l'impossibilité d'égaliser.</td></tr>
</table>

COMMENTAIRES AU PROBLEME N°2

Le dispositif

Voir commentaires au problème n°1.

Le matériel

Des perles de couleurs, de formes et de tailles différentes. Ces deux derniers critères sont volontairement choisis pour que les élèves ne se contentent pas de la comparaison des longueurs des bracelets pour conclure que ceux-ci ont le même nombre de perles.
Il faut veiller à ce que le nombre de perles d'une espèce ne corresponde pas à la valeur d'une part (10 perles pour un tout de 64 ou 11 perles pour un tout de 70).
La valeur du reste (4) entre en conflit avec le nombre d'élèves du groupe et la représentation que se font ceux-ci de " le moins possible".

La consigne

Elle est transmise oralement sans explication supplémentaire; la répéter si nécessaire, toujours sans modification.

La relance de l'enseignante

Quand les élèves annoncent la fin de leur travail, l'enseignante demande :

"Pourquoi dites-vous que c'est fini ?"

Si le groupe n'a pas pris en compte toutes les données de la consigne (partage, deux bracelets par élève, parts égales, reste minimum), l'enseignante les lui rappelle, sans modification.

Mise en oeuvre, quelques remarques

Relire préalablement celles du premier problème. Les lignes suivantes ne reprennent que ce qui est spécifique au problème n°2.

Les élèves peuvent engager un partage en 3 parts pour ne fabriquer qu'un seul bracelet chacun et s'arrêter (non prise en compte de toutes les données de la consigne). A la suite d'une relance par rappel de la consigne, ils peuvent partager leur propre part en 2 ou recommencer le partage du tout, en 6 parts cette fois.

S'ils partagent en 6, le reste de 4 peut entrer en conflit avec le nombre d'élèves.

S'ils partagent leur propre part en 2, chacun se retrouve avec un reste de 1 (21 : 2 = 10 reste 1) et doit décider de le joindre au reste du premier partage en 3 (64 : 3 = 21 reste 1).

PARTAGES

PROBLEME N° 3

<table>
<tr><td>Degrés</td><td colspan="2">2P, 3P</td></tr>
<tr><td>Matériel</td><td colspan="2">1 boîte
3 assiettes en carton
Objets divers tels que : allumettes, agrafes, pions, jetons de couleurs variées</td></tr>
<tr><td>Consigne</td><td colspan="2">Vous devez vous partager ces objets.
Il faut que chacun ait le même nombre d'objets.
Il doit en rester le moins possible dans la boîte.</td></tr>
<tr><td>Contenu mathématique</td><td colspan="2">Domaine numérique : ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}$
Le tout comme somme des parties
La division-partage : équivalence des parts + reste</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Variables didactiques</td><td>Désignation :</td><td>Valeur :</td></tr>
<tr><td>Nombre d'élèves par groupe</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Nombre total d'objets</td><td>170</td></tr>
<tr><td>Nombre d'objets par catégorie</td><td>86 allumettes
34 agrafes
26 pions
24 jetons</td></tr>
<tr><td>Reste</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Quelques démarches possibles des élèves</td><td colspan="2">Partage global ou par catégories d'objets :
• chacun pour soi
• distribution faite par un élève
• partage organisé, chacun prend en même temps le même nombre d'objets
Constatation de l'équivalence des parts :
• contrôle sur la procédure de partage
• comptage et égalisation si nécessaire</td></tr>
</table>

COMMENTAIRES AU PROBLEME N°3

Le dispositif

Voir commentaires au problème n°1.

Le matériel

Les nombres choisis dépassent le domaine numérique des élèves de 2P, ce qui les oblige à mobiliser des démarches variées de partage. Le nombre d'espèces d'objets (allumettes, agrafes, etc) doit être supérieur à celui des élèves d'un groupe pour entraîner de toute façon une entrée en matière sur le partage.

Le nombre d'objets par espèce n'est pas choisi au hasard. Dans le cas où les élèves se répartiraient d'abord les allumettes (86 : 3, reste 2), puis les agrafes (34 : 3, reste 1), ensuite les pions (26 : 3, reste 2) et finalement les jetons (24 : 3, reste 0), ils se retrouveraient avec un premier reste de 5, puis après redistribution, avec un reste final de 2.

La consigne

Elle est transmise oralement sans explication supplémentaire; la répéter si nécessaire, toujours sans modification.

Les relances de l'enseignante

Quand les élèves annoncent la fin de leur travail, l'enseignante demande :

"Pourquoi dites-vous que c'est fini ?"

Si le groupe n'a pas pris en compte toutes les données de la consigne (parts égales, reste minimum) l'enseignante les lui rappelle, sans modification, puis demande aux élèves :

"Etes-vous sûrs que vous en avez le même nombre?"

Les élèves n'étant, dans l'ensemble, pas à même de dénombrer leur part, peuvent se justifier à l'aide d'un argument lié au mode de distribution. Par exemple, pour un des groupes observés ayant un distributeur, l'argument est exprimé ainsi :

> *"J'ai toujours donné la même chose, j'ai commencé par moi et fini par lui."*

Si les élèves prennent en même temps le même nombre d'objets, le respect de la règle qu'ils se sont donnée est suffisant pour justifier de l'égalité des parts.

Mise en oeuvre, quelques remarques

Les trois élèves se partagent les objets globalement ou par catégorie; il peut arriver qu'ils s'approprient chacun une catégorie et qu'ils engagent le partage pour la quatrième seulement. Quand ils annoncent qu'ils ont fini, le rappel de la consigne devrait les ramener à la contrainte de l'égalité des parts.

Autre répartition possible : un élève prend les 86 allumettes, un autre les 34 agrafes et le troisième les 26 pions et les 24 jetons. Dans ce groupe, la vérification des parts passe par le comptage qui entraîne une égalisation par étapes.

Relevons que la non cardinalisation du tout et des parts n'empêche pas les élèves de traiter ce problème de partage.

En 3P et 4P, les activités de partage se poursuivront pour contribuer à la construction du concept de division.

PARTAGES

<table>
<tr><th colspan="3">PARTAGES</th></tr>
<tr><td colspan="3">PROBLEME N° 4</td></tr>
<tr><td>Degrés</td><td colspan="2">fin 1P, 2P, 3P</td></tr>
<tr><td>Mise en garde</td><td colspan="2">Ce problème doit être précédé des problèmes 1, 2 et 3</td></tr>
<tr><td>Matériel</td><td colspan="2">Au magasin : 1 boîte avec environ 150 bonbons
Par groupe : 1 "sac à commissions", des feuillets de commande, un crayon, trois jetons</td></tr>
<tr><td>Règle du jeu</td><td colspan="2">Vous devez aller chercher des bonbons au magasin en faisant le moins de voyages possible.
Chaque fois que vous faites un voyage, vous devez donner un jeton à la vendeuse.
L'équipe qui a gardé le plus de jetons a gagné.
Un seul élève par groupe apporte la commande écrite.</td></tr>
<tr><td>Consigne</td><td colspan="2">Vous devez vous mettre d'accord sur un nombre possible de bonbons pour qu'après le partage en parts égales dans l'équipe il reste 2 bonbons.
Ecrivez ce nombre sur le feuillet de commande.</td></tr>
<tr><td>Contenu mathématique</td><td colspan="2">Domaine numérique : ensemble des entiers naturels, ℕ
Le tout comme somme des parties
La division-partage : équivalence des parts + reste
Ecriture des nombres</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Variables didactiques</td><td>Désignation :</td><td>Valeur :</td></tr>
<tr><td>Nombre d'élèves par groupe</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Nombre de jetons par équipe</td><td>3 par partie</td></tr>
<tr><td>Quelques démarches possibles des élèves</td><td colspan="2">Commandes successives sans prise en compte du nombre d'élèves, du reste ou des commandes précédentes dont la répartition est déjà effectuée
Distribution mimée en tenant compte ou non du reste</td></tr>
</table>

COMMENTAIRES AU PROBLEME N°4

Le dispositif

Une demi-classe répartie en groupes de 3 élèves. L'enseignante tient le rôle du marchand de bonbons.
Un élève par groupe fait le commissionnaire, il transmet au marchand la commande du groupe notée sur le feuillet.
Il est évident qu'on ne ramène pas de bonbons au magasin !
D'autre part, chaque nouvelle commande s'ajoute aux précédentes.

Le matériel

Plusieurs feuillets de commande par groupe. Le feuillet de commande joue un rôle important. Il nécessite une concertation et une décision commune du groupe suivies d'une formulation écrite.
Le nombre de jetons, fixé à trois par partie, autorise des ajustements de commandes (au coup par coup) et limite à la fois ceux-ci dans l'intention de réussir la tâche en peu de coups.

La règle du jeu et la consigne

La règle du jeu est énoncée avant la consigne, elle sert aux élèves à se construire une première représentation de la tâche :

"Vous devez aller chercher des bonbons au magasin en faisant le moins de voyages possible. Chaque fois que vous faites un voyage, vous devez donner un jeton à la vendeuse. L'équipe qui a gardé le plus de jetons a gagné. Un seul élève par groupe apporte la commande écrite."

Le tout est transmis oralement sans explication complémentaire. Règle du jeu et consigne peuvent être répétées si nécessaire sans modification.

Les relances de l'enseignante

"Faites une commande avec un nombre plus grand que ... " (une dizaine de plus que la plus grande commande effectuée jusqu'à maintenant). Cette relance constitue un nouveau problème, l'enseignante la propose au fur et à mesure que les groupes gagnent. Elle peut également reprendre le jeu plus tard dans l'année avec cette relance comme variable didactique en l'incorporant à la consigne.

La durée du problème n°4

Contrairement aux trois autres problèmes, celui-ci se déroule en plusieurs parties pour permettre aux élèves d'améliorer leurs procédures et de découvrir la loi qui fait gagner.
Avant chaque nouvelle partie, les bonbons sont remis au magasin et les élèves ont de nouveau trois jetons.

Mise en oeuvre, quelques remarques

Les élèves choisissent des nombres familiers correspondant à leurs connaissances du moment. Ils les choisissent aussi en fonction de la représentation imagée du partage à venir, des doigts à disposition et de leurs connaissances additives.

Des procédures pour déterminer le tout :

- Le partage mimé :
  a) 1-1-1 (3) -1-1-1 (6) -1-1-1 (9) ... comptabilisé sur les doigts avec souvent un arrêt en dessous de la dizaine
  b) 1-2-3, 4-5-6, 7-8-9, 10-11-12, ... puis commande avec ou sans oubli du reste
- Décision sur la part de chacun : par ex : 5 - 5 - 5, puis commande, soit en multipliant par le nombre de joueurs (avec ou sans reste), soit en ne prenant en compte qu'une seule part (avec ou sans reste).

Des procédures d'ajustement :

- Oubli des bonbons déjà acquis :
  Les élèves font une nouvelle commande sans prendre en compte les bonbons déjà distribués.
- Traitement du reste :
  Les élèves commandent le reste, soit global (2), soit le complément à leur première solution (1).
- Egalisation des parts :
  Le reste est correct (mis de côté), mais les parts sont inégales; les élèves commandent les bonbons manquants.

Ce problème met un terme à la séquence des quatre problèmes proposés, ce qui ne signifie nullement que les apprentissages visés soient terminés.

Bien que traitant du partage, ce problème, pour la première fois de la séquence, contraint les élèves à prendre en compte le tout sans support matériel au départ. Celui-ci est là pour vérifications et ajustements après coup.

Ce quatrième problème ne doit donc pas être pris pour évaluer les apprentissages effectués au cours des trois problèmes précédents.

CONTRAINTES ET VARIABLES

Comment un enseignant peut-il être certain que les connaissances construites par ses élèves au cours d'une activité déterminée sont effectivement celles qu'il souhaitait voir apparaître ? Quelles garanties a-t-il de la stabilité des effets des mêmes situations-problèmes proposées classe après classe ?

Longtemps, les auteurs de manuels ont transmis au corps enseignant les moyens de contrôle de ces effets au travers de la description de scénarios de leçons qui présentaient le plus précisément possible un "déroulement idéal" des activités. Actuellement, cette pratique est abandonnée au profit de la mise sur pied d'un contrôle préalable, dès la conception des problèmes, sur les conditions de leur réalisation et sur le maintien du sens des connaissances en jeu. Cela s'effectue à travers l'explicitation des contraintes de la situation, par exemple, le rôle joué par l'enseignante dans les problèmes de logique (sorcières et pirates), et les consignes très précisément énoncées. Le petit cadenas indique qu'un changement, même insignifiant, entraînerait inévitablement, chez les élèves aux prises avec le problème, des modifications dans leurs premières représentations de la tâche, dans leurs procédures et conduirait finalement à un resserrement de l'éventail des réponses.

D'UN FONCTIONNEMENT SPONTANE A UNE GENESE ARTIFICIELLE

Devant un problème, l'élève va d'abord engager spontanément les connaissances qu'il a à disposition. C'est une manière d'entrer en matière, une autre pouvant être d'échapper à la tâche en mettant sur pied des conduites d'évitement (modifications de la consigne, autres usages du matériel à disposition, p. ex.).
Cependant, apprendre, c'est construire de nouvelles connaissances et cela se fait toujours en réaménageant et en dépassant celles qui préexistent. Comment donc créer les conditions de leur dépassement au "profit d'une recherche constructive de modèles plus élaborés" (Péres)[11]?

La mise en place de "sauts informationnels", dans le problème, créera artificiellement, chez les élèves, les conditions d'émergence de nouvelles procédures, de nouveaux objets de pensée. Dans la séquence du "partage", le passage de la répartition en trois parts avec un reste à la répartition en six parts (les bracelets) avec un reste supérieur au nombre d'élèves va provoquer chez ceux-ci des conflits suivis de réaménagements de leurs connaissances. De même, dans le troisième problème de "partage", avec des quantités qui dépassent les compétences numériques des élèves exigées par le plan d'études, le contrôle des procédures de répartition des objets joue un tout autre rôle que lorsque les élèves estiment et ajustent, dans les séquences précédentes (jetons et perles), leurs collections à l'aide du dénombrement.

[11] Péres J.; Utilisation d'une théorie des situations en vue de l'identification des phénomènes didactiques au cours d'une activité d'apprentissage scolaire; Bordeaux; 1984.

UN JEU DE VARIABLES POUR DES PARTAGES TRES EQUITABLES !

Qui dit variables pense modifications possibles. C'est aussi vrai pour les variables didactiques. Alors pourquoi en avoir fixé certaines, si ce n'est pour contrôler quelques effets, entre autres, le choix de procédures.

Par exemple, dans la séquence des "partages", la taille des perles a une importance sur les procédures de contrôle mises en oeuvre par les élèves; si elles étaient toutes de même taille, des élèves pourraient privilégier la comparaison de longueurs pour estimer la valeur de leurs parts, au détriment d'un dénombrement. Les parts équitables et le reste le plus petit possible sont aussi des variables. Le nombre de jetons (respectivement de perles ou d'objets) détermine non seulement la valeur des parts en fonction du nombre de celles-ci mais aussi le reste. Le quatrième problème est sous forme d'un concours, les élèves paient (en jetons) toute commande de bonbons; le nombre de jetons, limité à 3, devrait les contraindre à faire le moins de voyages possible, donc à se mettre d'accord sur des solutions pertinentes.

LES SORCIERES, UNE QUESTION DE LOGIQUE

Une des variables de situation de ce problème (cf. page 60) est le rôle joué par l'enseignante. Puisqu'elle détient les cartes retirées, elle est amenée à prendre des décisions sur la complétude et la pertinence des messages transmis par les groupes. Seules les descriptions complètes sont acceptées. Si le jeu se déroulait entre équipes d'élèves, l'une étant dépositaire des cartes retirées, nous savons fort bien que les élèves se satisferaient de descriptions partielles et que les récepteurs interpréteraient ces descriptions en fonction des cartes qu'ils détiendraient. Nous avons donc fait un choix lié aux exigences du savoir en jeu : la partition d'un ensemble en classes d'équivalence.

Par ailleurs, la décision de retirer trois cartes provoque, chez la plupart des élèves, la nécessité de coder les attributs pour s'en souvenir.

CLASSIFICATIONS ET RAISONNEMENT LOGIQUE

SORCIERES ET PIRATES

La logique est, entre autres définitions, un ensemble de règles clairement établies et définies, permettant d'organiser le discours et le raisonnement de manière déductive et sans ambiguïté.

Si l'étude de cette logique formelle ne peut en aucun cas intervenir pendant la scolarité primaire, on peut pourtant utiliser et développer le raisonnement logico-mathématique chez l'élève au travers d'activités adéquates se situant aussi bien dans le domaine numérique que dans le domaine non numérique.

Ces activités visent à développer les opérations intellectuelles telles que classer, ordonner, induire, déduire, comparer, dénombrer, c'est-à-dire mettre en relation. Un travail important peut se faire sans avoir recours trop rapidement à des représentations graphiques : cordes symbolisant des ensembles d'objets, tableaux et arbres organisant des données.

Les problèmes qui suivent permettent en effet d'approcher les objectifs scolaires visés dans le domaine de la logique, sans pour autant passer immédiatement à un formalisme imposé. Par exemple, pour répondre aux problèmes des sorcières, les élèves sont obligés d'effectuer divers classements, et pourtant cette démarche ne leur est pas suggérée par la consigne. Bien que n'utilisant pas de moyens conventionnels de représentations graphiques, ils mettent en oeuvre des mécanismes de raisonnement logique.

Rappelons que ces opérations n'interviennent pas seulement en mathématiques mais se retrouvent dans la plupart des activités cognitives.

LOGIQUE : LES SORCIERES		
Degrés	Fin 2E,1P, début 2P	
Matériel	Par groupe : 1 jeu de 18/24 cartes[12] des feuilles de brouillon	
Consigne	Vous devez récupérer en un seul voyage les trois cartes qui vous manquent en disant très précisément comment elles sont.	
Contenu mathématique	Partition d'un ensemble en classes d'équivalence selon les critères du jeu de cartes Relations d'inclusion, d'appartenance Conjonction d'attributs	
Variables didactiques	*Désignation :*	*Valeur :*
	Nb total de cartes	2E : 18 1P-2P : 24
	Nb de cartes retirées	2E : 2 1P-2P : 3
	Nb de critères *	2E : 3 1P-2P : 4
	Nb d'attributs *	2 ou 3
Quelques démarches possibles des élèves	Prise de connaissance du jeu : • observation des cartes pour découvrir les critères et attributs. Moyens mis en oeuvre pour découvrir les cartes manquantes : • divers classements de cartes selon les critères ou attributs recensés • mise en relation des critères et attributs pour identifier les cartes manquantes Description des cartes manquantes : • partielle ou complète • orale ou écrite • de une, de deux ou des trois cartes	

* Un **critère** (couleur de la robe; décor; animal; accessoire) est un ensemble d'attributs distincts; un **attribut** (orange; lune; crapaud; sans sac) est une valeur prise par un critère.

[12] Voir les commentaires pages suivantes.

COMMENTAIRES AU PROBLEME "LES SORCIERES"

Le matériel

Chaque classe de 1P dispose de trois jeux "Sorcières" de 36 cartes, faisant partie des moyens d'enseignement romands. Les enseignantes de 2E ou de 2P emprunteront les jeux à leurs collègues. Dans la mesure du possible, il est préférable que les cartes ne soient pas connues avant la présentation du problème.

Pour les 2E :

Chaque jeu de 36 cartes permet de fabriquer deux jeux de 18 cartes avec :

1 animal les 3 couleurs les 3 décors accessoire ou non	ou	1 valeur d'accessoire les 3 couleurs les 3 décors les 2 animaux

Il y a donc 4 jeux possibles :

- Toutes les sorcières avec un crapaud, qu'elles portent un sac ou non.
- Toutes les sorcières avec un hibou, qu'elles portent un sac ou non.
- Toutes les sorcières avec un sac, qu'elles tiennent un hibou ou un crapaud.
- Toutes les sorcières sans sac, qu'elles tiennent un hibou ou un crapaud.

Pour 1P - 2P :

Chaque jeu de 36 cartes permet de fabriquer un jeu de 24 cartes comportant les quatre critères (couleur, décor, animal, accessoire). Chaque jeu de 24 cartes peut avoir :

2 couleurs les 3 décors les 2 animaux un accessoire ou non	ou	les 3 couleurs 2 décors les 2 animaux un accessoire ou non

Un jeu comprendra par exemple toutes les sorcières à vêtements bleus et toutes celles à vêtements oranges.
Un autre jeu comprendra toutes les sorcières portant des robes avec des lunes et toutes celles portant des robes avec des étoiles.

Le dispositif et le rôle de l'enseignante

Une demi-classe répartie en groupes de trois élèves; un élève par groupe est le messager.

L'enseignante signale que des feuilles sont à disposition en cas de besoin.

En début d'activité, elle distribue un jeu complet de 18 (24) cartes à chaque groupe. Elle précise que toutes les cartes sont différentes et que le jeu est complet. Elle retire au hasard 2 (3) cartes dans chaque jeu, devant les élèves, mais sans que ceux-ci puissent voir de quelles cartes il s'agit.

Ensuite elle donne la consigne, puis elle attend les messagers :

- Si les descriptions des 2 (3) cartes sont complètes, elle les leur rend.
- Si les descriptions sont insuffisantes, elle renvoie les messagers sans commentaire dans leur groupe pour les compléter.

Mise en oeuvre, quelques remarques

L'enseignante donne la consigne telle quelle, sans commentaire ni suggestion de démarches (classements, repérages, codages, diagrammes). Si c'est nécessaire elle la répète.

Pour découvrir les cartes manquantes, les élèves ont recours à toutes sortes de classements partiels variés :

- par couleurs ou par décors ou par animal ;
- par paires (la sorcière à robe orange étoilée, n'ayant pas de sac et portant un crapaud, avec la sorcière portant la même robe, n'ayant pas de sac et portant un hibou, ou autres appariements selon une différence).

Les messages des élèves sont soit oraux soit écrits. Devant la nécessité de décrire complètement 2 (3) cartes, des groupes peuvent solliciter papier et crayon; le message écrit sert à se souvenir; il est lu par le messager et non par l'enseignante. Il peut être en langage naturel ou comporter des symboles.

Un message est incomplet si le messager décrit moins de 2 (3) cartes ou s'il manque des attributs.

Il est indispensable que l'enseignante reste le plus neutre possible dans son interprétation du message oral délivré par le messager, évitant d'y mettre plus que ce que les élèves transmettent.

<table>
<tr><th colspan="3">LOGIQUE : LES PIRATES</th></tr>
<tr><td>Degrés</td><td colspan="2">2P</td></tr>
<tr><td>Matériel</td><td colspan="2">Par équipe de 3 élèves : un jeu de 24 cartes (18 aux élèves et 6 à l'enseignante, ayant tous la même couleur de chemise)[13]
Pour la classe : 80 à 100 feuilles de petit format</td></tr>
<tr><td>Consigne</td><td colspan="2"><u>1er temps</u> :
Voici un jeu de cartes. Observez les cartes reçues.
Imaginez qu'on ajoute encore la possibilité d'avoir une chemise rouge (par exemple).
Combien de cartes faudrait-il encore faire ? Mettez-vous d'accord sur le nombre de nouveaux pirates et venez me le dire.[14]
<u>2ème temps</u> :
Sur chaque petite feuille, vous devez noter exactement ce qu'il faudrait dessiner si on ajoutait la chemise rouge. Ensuite, en une seule fois, apportez-moi toutes vos feuilles et vous recevrez les vraies cartes pour comparer.[15]</td></tr>
<tr><td>Contenu mathématique</td><td colspan="2">Produit cartésien
Voir également "les sorcières", page 61</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Variables didactiques</td><td>Désignation :</td><td>Valeur :</td></tr>
<tr><td>Nombre de cartes par équipe</td><td>24 (18 + 6)</td></tr>
<tr><td>Nombre de critères</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Nombre d'attributs par critère</td><td>2, 3 et 4</td></tr>
<tr><td>Quelques démarches possibles des élèves</td><td colspan="2">Anticipations diverses du nombre de cartes
Reconsidérations en cours de travail du nombre de cartes nécessaires
Description complète
Description incomplète ne tenant pas compte des trois critères ou avec oubli de certains attributs
Réorganisation du jeu s'il s'avère que la collection est incorrecte
Copie de certaines cartes déjà existantes</td></tr>
</table>

[13] Voir les commentaires pages suivantes.

[14] L'enseignante remet à chaque groupe le nombre de petites feuilles correspondant au nombre énoncé, puis lui donne la consigne suivante (2° temps).

[15] Pour le rôle de l'enseignante, lire impérativement les commentaires p.65.

COMMENTAIRES AU PROBLEME "LES PIRATES"

Le matériel

L'enseignante prélève dans les fiches prédécoupées jointes aux fichiers d'élèves de 2P des jeux complets comprenant chacun 48 pirates. Chaque jeu de 48 cartes permet de constituer le matériel pour 2 équipes. Il y a ainsi 4 combinaisons de jeux possibles :

	les 4 couleurs de chemises les 3 décors de pantalons avec sabre ou longue-vue tous avec un bandeau sur l'oeil	ou	les 4 couleurs de chemises les 3 décors de pantalons avec sabre ou longue-vue tous sans bandeau sur l'oeil
ou	les 4 couleurs de chemises les 3 décors de pantalons avec ou sans bandeau sur l'oeil tous avec un sabre	ou	les 4 couleurs de chemises les 3 décors de pantalons avec ou sans bandeau sur l'oeil tous avec une longue-vue

Chaque jeu de 24 cartes comporte ainsi 3 critères.
Dans chaque paquet, l'enseignante retire sans les montrer aux élèves 6 cartes de pirates ayant tous une chemise de même couleur.

Le dispositif, la mise en oeuvre et le rôle de l'enseignante

Une demi-classe répartie en groupes de trois élèves.

En début d'activité, l'enseignante distribue un jeu de 18 cartes à chaque groupe. Elle précise que toutes les cartes sont différentes et que le jeu est complet. Ensuite elle donne la consigne (voir 1er temps), puis elle attend le retour des groupes.

L'objectif visé dans cette première consigne est de privilégier la réflexion plutôt que l'action directe.

Sans faire de commentaire sur le nombre de pirates énoncé par les élèves, l'enseignante leur remet le nombre de feuilles correspondant. En effet, c'est la phase finale de comparaison qui validera ou invalidera le nombre anticipé par les élèves.

Dans le même temps, elle donne la seconde consigne (voir 2ème temps).
A nouveau, elle attend le retour des groupes.

L'enseignante reçoit les cartes proposées par les élèves, les observe et renvoie les groupes dans les cas suivants :

- s'il y a plusieurs cartes identiques, elle rappelle que toutes les cartes sont différentes
- si le nombre de cartes est inférieur à 6, l'enseignante dit qu' il en manque, sans autre précision

- si les élèves inventent d'autres critères, l'enseignante dit :"Observez les pirates; les vôtres doivent faire partie du même jeu"

Quand les six cartes sont correctes, ou si les groupes reviennent pour la deuxième fois avec une solution incorrecte, l'enseignante leur remet les six cartes du jeu et leur laisse la responsabilité de la comparaison.

Quelques remarques

Pour trouver le nombre de pirates à réaliser, les élèves ont recours à divers classements permettant plus ou moins aisément de déduire ce nombre.

Par exemple :

- 6 cartes — Réponse correcte trouvée à partir d'un classement selon le critère des trois couleurs reçues : 6 bleues, 6 vertes, 6 jaunes, par exemple

Cette réponse pourrait également être trouvée à partir d'un classement effectué selon le critère des décors de pantalons : 6 pirates avec pantalon rayé, 6 avec pantalon à carreaux et 6 avec pantalon à pois

Or, cette partition qui, dans chaque sous-ensemble, présente un mélange de couleurs de chemises, ne permet pas avec autant d'évidence que précédemment de déterminer le nombre de pirates à chemise rouge

- 2 cartes — Le raisonnement est le suivant :
  il y a 2 pirates à faire, un avec sabre et un avec longue-vue

- 18 cartes — Les élèves comptent la totalité des cartes et pensent que chacune d'elles doit être refaite avec une chemise rouge