

Géométrie métrique**§ 3 et 4 Géométrie analytique 2D - Exercices**

□ Liens hypertextes

Cours de géométrie analytique 2D:

<http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/GeomAnalytique2D/GA2D-Cours.pdf>

Supports de cours de mathématiques, niveau secondaire II:

<http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/index.html>

§ 3 Droites

En l'absence d'autres indications, toutes les composantes des vecteurs sont données par rapport à une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) et toutes les coordonnées des points sont exprimées dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

□ 3 - 1

Ecrivez l'équation cartésienne de la droite \mathcal{D} déterminée par les données suivantes:

- deux points $A(-1; 5)$, $B(6; -2)$;
- un point et un vecteur directeur $A(1; 3)$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$;
- un point et un vecteur normal $A(-2; \frac{1}{2})$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$;
- un point et la pente $A(\sqrt{3}; -2)$, $m = -\frac{2}{5}$.
- Généralisez: quelle est l'équation de la droite de pente m qui passe par le point $A(x_0, y_0)$?

□ 3 - 2

On donne $A(3; 1)$ et $B(-2; 0)$. Ecrivez l'équation de la médiatrice du segment AB .

□ 3 - 3

On donne la famille de droites $\mathcal{D}_m: m x + (m + 2) y - 2 = 0$ et les droites $\mathcal{E}: 3 x + 2 y - 5 = 0$, $\mathcal{F}: -9 x - 6 y + 7 = 0$.

- Vérifiez que \mathcal{E} et \mathcal{F} sont parallèles.
- Calculez m afin que \mathcal{D}_m soit parallèle à \mathcal{E} .
- Calculez m afin que \mathcal{D}_m soit perpendiculaire à \mathcal{E} .
- Montrez que toutes des droites de la famille \mathcal{D}_m passent par un même point I . Calculez les coordonnées de ce point.

□ 3 - 4

On donne le point $I(2; 5)$ et la droite $\mathcal{E}: y = -\frac{1}{2} x - 1$.

- Ecrivez l'équation de la droite \mathcal{D}_m de pente m qui passe par I .
- Parmi les droites de la famille \mathcal{D}_m , déterminez celle qui est perpendiculaire à \mathcal{E} .

3 - 5

Résolvez graphiquement le système d'inéquations

$$\begin{aligned}x - 5y + 2 &> 0 \\x + y &< 0 \\xy &< 0\end{aligned}$$

□ 3 - 6

Résolvez graphiquement le système d'inéquations

$$\begin{aligned}x + y - 2 &< 0 \\x - 4y - 12 &< 0 \\x^2 - 9 &< 0\end{aligned}$$

□ 3 - 7

a) Décrivez par un système d'inéquations l'intérieur du triangle dont les côtés sont supportés par les droites suivantes:

$$\begin{aligned}x + y - 4 &= 0 \\3x - 7y + 8 &= 0 \\4x - y - 31 &= 0\end{aligned}$$

b) Déterminez par calcul si le point $M(-3; 2)$ se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle.

□ 3 - 8

Calculez la distance du point à la droite dans chacune des situations suivantes:

- a) $A(2; -1)$ et $\mathcal{D}_1: 4x + 3y + 10 = 0$.
 b) $B(0; -3)$ et $\mathcal{D}_2: 5x - 12y - 23 = 0$.
 c) $C(-2; 3)$ et $\mathcal{D}_3: 3x - 4y - 2 = 0$.
 d) $D(1; -2)$ et $\mathcal{D}_4: y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2}$.

□ 3 - 9

D'un rectangle, on donne un sommet $A(-2; 1)$ et les équations des droites qui supportent deux côtés $\mathcal{D}_1: 3x - 2y - 5 = 0$ et $\mathcal{D}_2: 2x + 3y + 7 = 0$. Calculez l'aire de ce rectangle.

□ 3 - 10

On donne les sommets d'un triangle: $A(-10; -13)$, $B(-2; 3)$ et $C(2; 1)$. Du sommet B , on abaisse la perpendiculaire sur la médiane issue de C . Calculez la longueur de ce segment.

□ 3 - 11

Dans la famille des droites de pente m qui passent par le point $P(2; 7)$, déterminez celles dont la distance au point $Q(1; 1)$ est égale à 4. Représentez graphiquement la situation.

□ 3 - 12

Déterminez les équations des parallèles à la droite $\mathcal{D}: 3x - 4y - 10 = 0$ menées à une distance $\delta = 3$ de \mathcal{D} .

□ 3 - 13

Les droites d'équations $\mathcal{D}_1 : 5x + 12y - 10 = 0$, $\mathcal{D}_2 : 5x + 12y + 29 = 0$ supportent deux côtés d'un carré. Donnez les équations des droites qui supportent les deux autres côtés sachant que le point $M(-3; 5)$ appartient à une droite qui supporte un côté du carré.

□ 3 - 14

- a) Formez l'équation du lieu géométrique des points équidistants des droites $\mathcal{D}_1 : 3x - y + 7 = 0$,
 $\mathcal{D}_2 : 3x - y - 3 = 0$.
- b) Montrer que la droite qui est équidistante des deux droites parallèles $\mathcal{D}_1 : ax + by + c_1 = 0$,
 $\mathcal{D}_2 : ax + by + c_2 = 0$ est $\mathcal{D} : ax + by + \frac{1}{2}(c_1 + c_2) = 0$.

□ 3 - 15

Déterminez les équations des droites passant par $A(2; 1)$ et coupant l'axe des y sous un angle de 30° .

□ 3 - 16

Formez les équations des bissectrices des deux droites données.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 2x + 4y + 7 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 3 - 17

On donne le triangle de sommets $A(0; 0)$, $B(28; 4)$, $C(3; -21)$.

- a) Construisez, avec la règle et le compas, le cercle inscrit dans le triangle.
- b) Calculez les coordonnées du centre du cercle inscrit et le rayon de ce cercle.

Exercices facultatifs de renforcement

□ 3 - 18 (Réponse à la fin)

Le point $A(2; -5)$ est le sommet d'un carré dont un côté est porté par la droite d'équation $\mathcal{D} : x - 2y - 7 = 0$. Calculez l'aire de ce carré.

□ 3 - 19 (Réponse à la fin)

Les droites $\mathcal{D}_1 : 5x - 12y - 65 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : 5x - 12y + 26 = 0$ supportent deux côtés d'un carré. Quelle est son aire ?

□ 3 - 20 (Réponse à la fin)

Démontrez qu'on peut faire passer deux droites par le point $P(2; 5)$ de manière que leurs distances au point $Q(5; 1)$ soient égales à $\delta = 3$. Donnez les équations de ces droites.

□ 3 - 21 (Réponse à la fin)

Formez les équations des bissectrices des deux droites données.

$$\begin{cases} 3x + 4y - 1 = 0 \\ 5x + 12y - 1 = 0 \end{cases}$$

§ 4 Cercle

En l'absence d'indications explicites, toutes les composantes des vecteurs sont données par rapport à une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) et toutes les coordonnées des points sont exprimées dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

□ 4 - 1

- a) Ecrivez l'équation du cercle de centre $\Omega(-2; 1)$ de rayon $r = 3$.
- b) Ecrivez l'équation du cercle de centre $\Omega(0; 2)$ de rayon 2.
- c) Ecrivez l'équation du cercle de centre $\Omega(-1; 2)$ de rayon 5.

□ 4 - 2 (Réponses à la fin)

Déterminez l'équation du cercle défini par les données suivantes:

- a) Cercle centré à l'origine et de rayon 4.
- b) Cercle de centre $\Omega(4; -2)$ et de rayon 3.
- c) Cercle de centre $\Omega(5; -6)$ et passant par l'origine.
- d) Cercle de centre $\Omega(-4; 5)$ et passant par le point $A(1; 2)$.
- e) Cercle de diamètre AB où $A(3; 2)$ et $B(-1; 6)$.
- f) Cercle centré à l'origine et tangent à la droite d'équation $3x + 4y - 15 = 0$.
- g) Cercle de centre $\Omega(1; -1)$ et tangent à la droite d'équation $5x - 12y + 9 = 0$.
- h) Cercle passant par les points $A(3; 1)$ et $B(-1; 3)$ et ayant son centre sur la droite d'équation $3x - y - 2 = 0$.
- i) Cercle passant par les points $A(1; 0)$ et $B(5; 0)$ et tangent à l'axe des y .
- j) Cercle passant par les points $A(-1; 5)$ et $B(-2; -2)$ et $C(5; 5)$.

□ 4 - 3 (Réponses à la fin)

Que représentent les équations suivantes ? Dans les cas où il s'agit d'un cercle, on en donnera le centre et le rayon.

- a) $x^2 + y^2 - 16 = 0$
- b) $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$
- c) $x^2 - 4x = 0$
- d) $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 5 = 0$
- e) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$
- f) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 25 = 0$
- g) $4x^2 + 4y^2 + 80x + 12y + 265 = 0$
- h) $80x^2 + 80y^2 - 120x + 80y + 17 = 0$
- i) $x^2 - 5x + y - 3 = 0$

□ 4 - 4 (Résultats intermédiaires et réponse à la fin)

Formez l'équation des cercles passant par l'origine et par les points d'intersection des deux cercles d'équations $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 25$ et $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 9$.

□ 4 - 5

Résolvez graphiquement les systèmes d'inéquations suivants

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x - y > 0 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ y \leq -x^2 + 1 \end{cases} \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \\ x^2 + 4x + y^2 - 10 \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□ 4 - 6 (Corrigé à la fin)

On donne les équations de deux droites et les coordonnées d'un point situé sur la première $\mathcal{D}_1 : 7x - y - 5 = 0$, $\mathcal{D}_2 : x + y + 13 = 0$ et $M(1; 2) \in \mathcal{D}_1$. Déterminez les équations des cercles qui sont tangents à \mathcal{D}_1 et à \mathcal{D}_2 et passent par M .

□ 4 - 7

On donne le cercle d'équation $C : x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$.

- Déterminez l'équation de la tangente au cercle C par le point $P(1; 3)$.
- Discutez, en fonction des coordonnées du point $P(x, y)$, du nombre de tangentes au cercle C qui sont issues de P .

□ 4 - 8

Calculez l'angle sous lequel les cercles d'équations $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$ et $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$ se coupent.

□ 4 - 9

Déterminez les équations des tangentes au cercle d'équation $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$ qui sont parallèles à la droite d'équation $\sqrt{3}x - y + \sqrt{5} = 0$.

□ 4 - 10

On mène par le point $A(4; 2)$ les tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 10$. Calculez l'angle formé par ces tangentes.

□ 4 - 11

Par le point $A(6; -8)$, on mène les tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$. Calculez la distance de A à la corde déterminée par les points de contact.

□ 4 - 12

- Montrez que l'ensemble C d'équation $x^2 + y^2 - 5x + 2y + 4 = 0$ est un cercle.
- Montrez que le cercle coupe la droite $x = 1$ en deux points A et B dont on calculera les coordonnées.
- Ecrivez les équations des tangentes au cercle aux points A et B .
- Calculez les coordonnées du point commun P des tangentes.
- Ecrivez l'équation de la droite de pente m qui passe par P et déterminez les valeurs de m pour lesquelles la droite coupe le cercle.

□ 4 - 13

On donne le cercle d'équation $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

- On considère les tangentes au cercle issues de $A(1; 3)$. Calculez les coordonnées des points de tangence.
- On considère les tangentes au cercle issues de $B(-6; 2)$. Déterminez les équations des tangentes.

Exercices mélangés

□ 4 - 14

Formez l'équation du cercle tangent aux deux droites parallèles d'équations $2x + y - 5 = 0$, $2x + y + 15 = 0$ et passant par le point $A(2; 1)$ de la première.

□ 4 - 15

Un point P est situé à 9 m d'une tour circulaire de 8 m de diamètre. Quelle est la longueur des tangentes issues de P ?

□ 4 - 16

Déterminez le centre du cercle situé sur la droite d'équation $x + y = 0$ sachant que ce cercle passe par les points d'intersection des deux cercles suivants: $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 50$ et $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 10$.

□ 4 - 17

Le point $\Omega(3; -1)$ est le centre d'un cercle découpant sur la droite d'équation $2x - 5y + 18 = 0$ une corde de longueur $\delta = 6$. Déterminez l'équation de ce cercle.

Exercices pour lesquels on demande la marche à suivre seulement

□ 4 - 18

Formez les équations des cercles passant par l'origine et qui sont tangents aux droites d'équations $x + 2y - 9 = 0$ et $2x - y + 2 = 0$.

□ 4 - 19

Formez les équations des cercles qui sont tangents aux trois droites d'équations $3x + 4y - 35 = 0$, $3x - 4y - 35 = 0$ et $x - 1 = 0$.

Exercices facultatifs de renforcement

□ 4 - 20

On donne le triangle de sommets $A(0; 0)$ et $B(28; 4)$ et $C(3; -21)$. Calculez les coordonnées du cercle circonscrit et le rayon de ce cercle.

□ 4 - 21

Formez l'équation du cercle qui, ayant son centre sur la droite d'équation $2x + y = 0$, est tangent aux droites d'équations $4x - 3y + 10 = 0$ et $4x - 3y - 30 = 0$.

§ 3 et 4 - Réponses de certains exercices

□ Réponse de l'exercice 3-18

L'aire du carré = 5.

□ Réponse de l'exercice 3-19

L'aire du carré = 49.

□ Réponse de l'exercice 3-20

Famille des droites de pente m passant par P

$$\mathcal{D}_m : m x - y + 5 - 2m = 0$$

Recherche de l'ensemble des droites "affines" :

$$\text{dist}(\mathcal{D}_m, Q) = \delta$$

$$\frac{|m \cdot 5 - 1 + 5 - 2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3$$

$$|3m + 4| = 3\sqrt{m^2 + 1}$$

$$9m^2 + 24m + 16 = 9(m^2 + 1)$$

$$m = \frac{-7}{24}$$

$$\mathcal{D}_{\frac{-7}{24}} : \frac{-7}{24}x - y + 5 - 2 \frac{-7}{24} = 0$$

$$\mathcal{D}_{\frac{-7}{24}} : 7x + 24y - 134 = 0$$

Recherche d'une éventuelle droite verticale:

$$\mathcal{V} : x - 2 = 0$$

$$\text{dist}(\mathcal{V}, Q) = \frac{|5 - 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 3$$

Il y a donc deux solutions : $\mathcal{D}_{\frac{-7}{24}}$ et \mathcal{V} .

□ Réponse de l'exercice 3-21

Equations des bissectrices:

$$7x - 4y - 4 = 0$$

$$32x + 56y - 9 = 0$$

□ Réponses 4 - 2

a) $x^2 + y^2 = 16$

b) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 9$

c) $(x - 5)^2 + (y + 6)^2 = 61$

d) $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 34$

e) $(x - 3)(x + 1) + (y - 2)(y - 6) = 0$ ou $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$

f) $x^2 + y^2 = 9$

g) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$

h) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$

i) Deux solutions: $(x - 3)^2 + (y \pm \sqrt{5})^2 = 9$

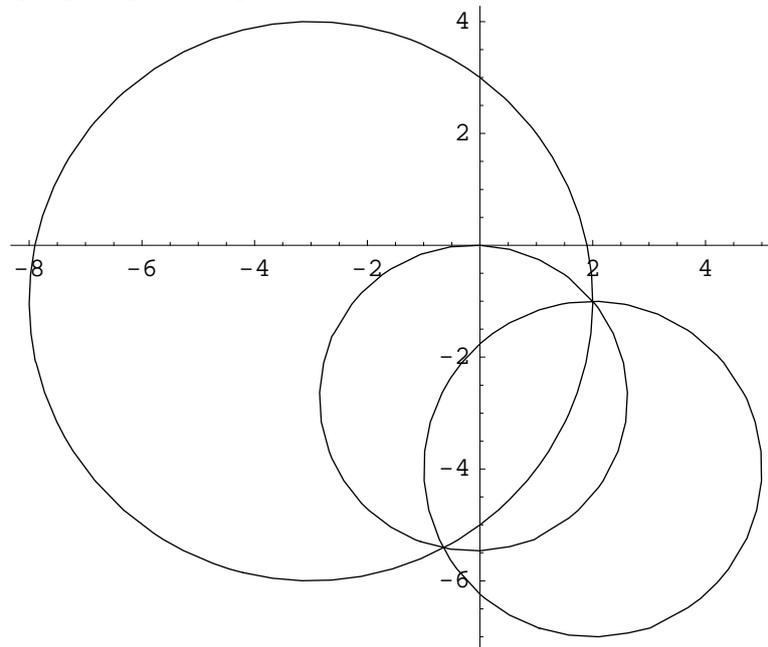
j) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

□ Réponses 4 - 3

- a) Cercle de centre $(0; 0)$ de rayon 4.
- b) Cercle de centre $(0; 3)$ de rayon 5.
- c) Réunion de deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.
- d) Cercle de centre $(5; -4)$ de rayon 6.
- e) Point de coordonnées $(3; 4)$.
- f) Ensemble vide.
- g) Cercle de centre $(-10; -\frac{3}{2})$ de rayon 6.
- h) Cercle de centre $(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2})$ de rayon $\frac{\sqrt{15}}{5}$.
- i) Parabole d'équation $y = -x^2 + 5x + 3$.

□ Exercice 4 - 4, résultats intermédiaires et réponse

Une figure nous indique que le problème possède une et une seule solution



Les points d'intersection des deux cercles donnés sont

$$A \left(-\frac{11}{17}, -\frac{92}{17} \right), \quad B (2, -1)$$

Le cercle qui passe par les points A, B et $O(0, 0)$ a pour équation

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{13}x + \frac{71}{13}y = 0$$

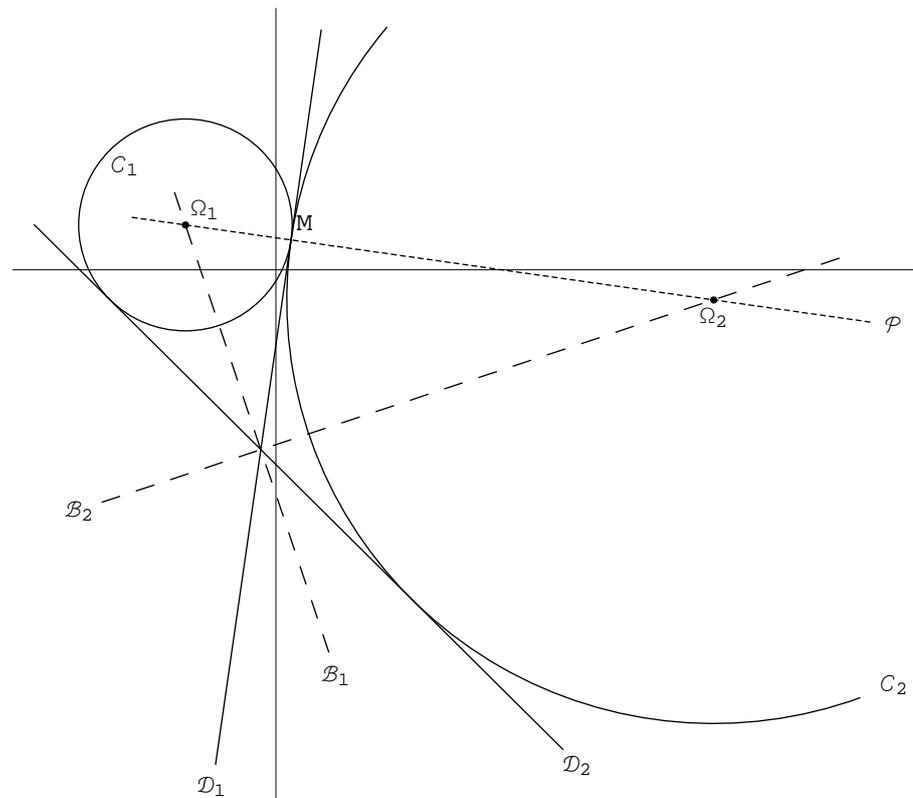
■ Corrigé de l'exercice 4-6

□ Construction

1-ère condition: les cercles qui sont tangents à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ont leurs centres sur les bissectrices \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 des deux droites.

2-ème condition: les cercles qui sont tangents à \mathcal{D}_1 en M ont leurs centres sur la perpendiculaire \mathcal{P} à \mathcal{D}_1 en M .

Il existe deux solutions. Le centre Ω_1 du premier cercle C_1 est situé à l'intersection des droites \mathcal{B}_1 et \mathcal{P} ; son rayon est $r_1 = \|\overrightarrow{\Omega_1 M}\|$. Le centre Ω_2 du deuxième cercle C_2 est situé à l'intersection des droites \mathcal{B}_2 et \mathcal{P} ; son rayon est $r_2 = \|\overrightarrow{\Omega_2 M}\|$.



□ Calculs

Equations des bissectrices:

$$\frac{|7x - y - 5|}{\sqrt{50}} = \frac{|x + y + 13|}{\sqrt{2}}$$

En remarquant que $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, on peut simplifier par $\sqrt{2}$:

$$|7x - y - 5| = 5|x + y + 13|$$

$$7x - y - 5 = 5x + 5y + 65 \quad \text{ou} \quad 7x - y - 5 = -5x - 5y - 65$$

$$2x - 6y - 70 = 0 \quad \text{ou} \quad 12x + 4y + 60 = 0$$

En remarquant que la pente de la première droite est positive tandis que la pente de la deuxième est négative, on numérote les deux droites selon le choix effectué dans la figure:

$$\mathcal{B}_2 : x - 3y - 35 = 0 \quad \text{ou} \quad \mathcal{B}_1 : 3x + y + 15 = 0$$

Equation de la perpendiculaire

Un vecteur directeur de \mathcal{P} est $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Donc \mathcal{P} peut s'écrire

$$-x - 7y + c = 0$$

\mathcal{P} passe par le point $M(1; 2)$, donc $-1 - 7 \cdot 2 + c = 0$ et $c = 15$; d'où

$$\mathcal{P} : x + 7y - 15 = 0$$

Equation du premier cercle

$$\begin{cases} 3x + y + 15 = 0 & | \cdot (-1) \\ x + 7y - 15 = 0 & | \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow 20y - 60 = 0$$

$$y = 3; \quad x = -7y + 15 = -6; \quad \Omega_1 (-6; 3)$$

$$r_1 = \left\| \begin{pmatrix} 1 + 6 \\ 2 - 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{50}$$

$$C_1 : (x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 50$$

Equation du deuxième cercle

$$\begin{cases} x - 3y - 35 = 0 & | \cdot (-1) \\ x + 7y - 15 = 0 & | \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow 10y + 20 = 0$$

$$y = -2; \quad x = -7y + 15 = 29; \quad \Omega_2 (29; -2)$$

$$r_2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 - 29 \\ 2 + 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{800}$$

$$C_2 : (x - 29)^2 + (y + 2)^2 = 800$$